

INTRODUCTIO

IN

ALGEBRAM

AUCTORE

JACOBO ANDREA

TOMMASINI M. D.

ET IN ALMO PISANO LYCEO PUBL. MATH. SUBLIMIOR. PROF.

PARS PRIMA.







LUCÆ MDCCLXXXIV.

Typis JOSEPHI ROCCHII

CUM APPROBATIONE.

In hoc gaudeo aliquid discere, ut doceam. *Seneca Lib. I. Epist. VI.*
Contentus paucis lectoribus. *Horat. Satyr. Lib. I. Sat. X.*



REGIÆ CELSITUDINI

SERENISSIMI

PETRI LEOPOLDI

ARCHIDUCIS AUSTRIÆ, HUNGARIÆ AC BOEMIÆ PRINCIPIS,

MAGNI ETRURIÆ DUCIS

&c. &c. &c.

REGIA CELSITUDO.



Ximia benignitas, qua in summum Tuum Patrocinium, PRINCIPUM CLEMENTISSIME, aliud meum Opu-

sculum suscipere dignatus fuisti, nec non assiduus ardor, quo Artes, Facultatesque omnes, ad Juventutem præsertim instruendam proficuas, tueris, ac foves, animos mihi addiderunt, ut recentem hunc, qualiscumque sit, laborem meum Algebræ Institutiones complectentem, Tuisque paternis curis obsecundantem, Tibi offerre decreverim. Tenue quidem Opus, nec tanto Principe dignum, at singularis Tua comitas & humanitas, quæ Solis instar providos beneficientiæ radios ubicumque diffundit, spem felicioris eventus mihi non adimit. Hæreditariæ siquidem jam extant in augusta Tua FAMILIA Virtutes omnes

præ-

præſtantiſſimæ; quare nil mirum, ſi in Tua quoque REGIA CELSITUDINE tam eminenter eluceant. Profecto quis in calamitoſis adjuvandis propenſior? Quis in extimulanda induſtria diligentior? Quis in acutioribus ingeniis protegendis alacrior? Quis in Debitorum pecuniis (nec parvi certe momenti) condonandis liberalior? Quis in Legibus condendis prudentior? Quis in flagitiis puniendis, improborumque audacia refrænanda juſtior, ac vigilantior? Tot excelſæ animi Dotes, quæ Te reddunt Subditis charum, Exteris admirandum, ſtrenuo Tuo litterarum ſtudio, Tuo acerrimo ingenio, optimæ Tuæ edu-

cationi, Tuo ingenuo mentis candori, Tuorumque Proavorum immortalium exemplo debentur. Sed quum tantam non habeam vim dicendi, ut egregias Tuas laudes commemorare possim, istarum tantummodo admirator, Te supplex (da veniam) oro, atque obtestor, ut pro ea qua polles. ingenita Clementia, hoc quamvis exiguum muneris mei tributum, in perpetuum meæ humillimæ gratitudinis, ac profundæ venerationis monumentum, benigniter excipere minime renuas.

REGIÆ TUÆ CELSITUDINIS

Humillimus Famulus & addictissimus Subditus
Jacobus Andreas Tommasini.

PRÆ-

PRÆFATIO.

IN tanta Elementorum de rebus analyticis agentium supellectile supervacaneum, si non ineptum, nonnullis videri fortasse poterit, me novum super eodem argumento librum in medium proferre ad obruendam potius quam ad litterariam Rempublicam amplificandam. Verum fore confido, ut ab ipsis veniam impetrem, si in animum sibi induci non moleste ferant, me non ultro, sed crebris Amicorum incitamentis excitatum, & nonnullorum auctoritate victum operi manum admovere tandem decrevisse; quod profecto in causa fuit, ut quamvis id genus elucubrationes a viris doctissimis egregie pertractatae me ab incoepto detenuissent, si meo judicio innixus me in hac palaestra exercere statuissem, aliorum cohortationibus & impulsibus, qui mihi animos addiderunt, alacrior factus opus aggredi non detractavi. Quia vero in

hoc

hoc labore exantlando non gloriolæ vanitas, & libido obsecundanda, sed Studentum fructus atque profectus, ut muneris mihi demandati fert conditio, est attendendus, operæ pretium duxi, ut una perspicuitati studens, & Tironum commodo consulens, nimiam aliquando brevitatem pro re nata evitarem, ordine tamen concinniori retento, & mathematica servata severitate. Interea demonstrationes directas, prout rei difficultas patitur, expiscari, atque huic Operi inserere allaboravi, rejectis pro viribus variis inductionibus, quibus interdum graviores quoque propositiones non sine aliqua licentiæ specie ostenduntur. Ut autem id perficerem, quum nonnulla, eaque non vulgaris quidem indaginis, proprio marte excogitata recensuissem, cetera ex Auctorum clarissimorum penu desumpsi, eo tamen consilio, ut faciliora, & breviora eligens ratiocinia, quæ sparsim sunt edita, quæque ad manus discentium non sine sumptu, multisque impedimentis pervenire possunt, colligendo, ac decenter distribuendo, opus ipsis Tironibus præceptore destitutis proficuum, imminutis difficultatibus, molestiisque, consurgeret. Accedat quod luculentissimum exemplum imitandum nobis reliquit Romani Parens eloquii, dum ait: Sed omnibus

bus unum in locum coactis Scriptoribus, quod quisque commodissime præcipere videbatur, excerpsimus, & ex variis ingeniis excellentissima quæque libavimus.

Auctorum hac occasione, e quibus vel nova ratiocinia, vel novas methodos deprompsi, nomen reticui, in quo mihi videor non peccasse, neque ex debitis eorum meritis nihil quicquam detraxisse, publice namque prostant, & si non omnibus, multorum tamen teruntur manibus ipsorum scripta, volitantque per ora virum eorum inventa, nec temporis notitia desideratur, quo ista orbi litterato fuerunt ab ipsis impertita; Quod dum perago, absit, ut suspicer, id viros illos doctissimos ægre laturos, eos enim ad scientiæ fastigium jam evectos abunde ditat multiplex rerum reconditarum cognitio, nec inficit immodicus laudis pruritus, qui animos tantum imbecillos exagitat. Litteratorum, qui præclarum hoc nomen jure merentur, vigiliæ, & occupationes indefessæ hominum commodis comparandis, ærumnisque quoad fieri potest avertendis dicantur, adeoque tam sunt nostris temporibus quam posteritati consecratæ; nihil igitur in generosis hisce Largitoribus post donationem remanet, nisi præsentis ac futuri ævi grata, & immortalis recordatio, quæ

pre-

pretiosum eorum munus satis superque rependit. Quapropter non solum nihil ab Auctoribus eripio, nihil extorqueo, sed dum studiosæ Juventuti, eorum adferens inventa, utilem operam navo, beneficentissimis eorundem conatibus lubens obsecundo.

Quod superest, quum propria experientia mihi compertum sit, indoctos, audacesque sæpius non deesse, qui Adolescentes ab hujusmodi Facultatis studio avertant; inepti isti dum vanam difficultatis speciem, & somniatam Algebræ ariditatem exagerant, ingenia præstantissima suffocant: possem occasione arrepta innumeras perſc« qui hujus disciplinæ laudes, at superfluum hoc arbitror, dum apud cultiores omnes Nationes, ob ejus in humana vita necessitatem, summo semper in pretio sit habita. Quem enim latet, hanc memoriæ (thesauro rerum omnium) adjuvandæ in quæstionibus intricatioribus enodandis maxime opitulari? Quem fugit, homines hac doctrina excultos facilius præ ceteris fictum a germano secernere? Quis, nisi omni eruditione destitutus, ignorat, quantum hujus ope Physicam, Dynamicam, Hydrodynamicam, Astronomiam, Opticam, Chimicam, Navigationem, ludos sortis, census pro vitæ diuturnitate, & alia sexcenta

per-

perfectionis quasi fines attigisse? Profecto quicquid certi scire possumus, per mathematicas tantummodo scimus facultates, quum per alias cujuscumque generis disciplinas versemur ut plurimum in ambiguitate. Jure igitur meritoque ipsam apicem totius eruditionis humanæ *doctissimus Wolfius appellat. Alacri igitur animo Adolescentes, vanis suspicionibus excussis, susurronibusque depulsis, florentissimum hunc veritatum campum excolant, certi se fructus uberrimos tam in acuendo intellectu, quam in ceteris facultatibus acquirendis fore percepturos, dummodo patientem huic studio commodent attentionem. Cum veritatis lux perpetuo præit, quamvis sit operosum quod agitur, libenter & quasi sine labore peragitur, testis insignis Orator, ac Philosophus Tullius inquiens:* Quis ignorat, ii, qui Mathematici vocantur, quanta in obscuritate rerum, & quam recondita in arte, & multiplici, subtilique versentur? Quo tamen in genere ita multi perfecti homines extitere, ut nemo fere studuisse ei scientiæ vehementius videatur, quin quod voluerit, consecutus sit.

Itaque si Amicorum votis & auctoritati morem gerens, aliquid juvandi cupidus præstiti, quod grato animo exceptum in Tironum cedere possit utilitatem, hac

re-

remuneratione pro vigiliis laboribusque perpessu quidem asperis satis superque contentus, mihi de felici hoc eventu summopere gratulabor.

IN-



INTRODUCTIO
IN
ALGEBRAM
PARS PRIMA.

SECTIO I.

CAPUT I.

Definitiones.

1. ALgebra est scientia universalis *quanti*, sive Facultas, quæ docet res cujuscumque generis mensuram, vel expressionem admittentes inter se commixtas comparare, & cognitas ab incognitis, pro incognitarum valore adsequendo, secernere.

Dicitur etiam *Mathesis universalis*, quod eo modo, quo quantitates discretas Arithmetica, continuas Geo-

metria, Algebra præter iſtas compleſtitur etiam tempus, motum, vires, & alias omnes magnitudinum relationes, affectioneſque.

2. Diophantus Alexandrinus, ceterique veteres Algebræ cultores, inter quos Cardanus, ſeu verius Scipio Ferreus Bononienſis ejus Diſcipulus emicuit, numeris in hoc artificio uſi ſunt, donec Franciſcus Vieta Mathematicus Gallus iis majores Alphabeti literas ſubſtituit, unde aliud Algebræ genus priori longe præſtantius ortum eſt *Analyſis ſpecioſæ* nomine inſignitum, quod per rerum ſpecies & imagines literis expreſſas Problemata multo generalius reſolvit. Verum & ipſe Vieta methodum ſuam ad quæſtiones tantum numericas cum veteribus limitavit. Paulo poſt Hariotus celebris Mathematicus Anglus minores Alphabeti literas, utpote commodiores, majoribus ſubſtituit, quem ſequutus Carteſius, eas non tantum ad numeros, ſed ad cujuſcumque generis magnitudines feliciſſime traduxit. Hariotus, & cum ipſo Angli nonnulli in Artis Analyticæ praxi quantitates incognitas vocalibus, cognitas conſonantibus exprimunt; nos vero, quoniam uſus invaluit, Carteſii characteriſticam plerumque ſequemur, & quantitates datas cognitaſque prioribus literis a, b, c, &c. incognitas autem quæſitaſque poſtremis z, y, x, v, &c. deſignabimus.

3. Varia ſigna ad magnitudinum affectiones exprimendas ſunt unanimi conſenſu conſtituta; videlicet ſignum $+$ denotat additionem, & dicitur *plus*; ſignum $-$ indicat ſubtractionem, & dicitur *minus*; ſic $a+b$ ſignificat aggregatum, ſeu ſummam quantitatum a, & b, atque $a-b$ exprimit ſubtractionem

quan-

quantitatis b ex quantitate a, sive excessum magnitudinis a supra magnitudinem homogeneam b: quare aggregatum $a+b$ pronunciari debet a *plus* b, subtractio vero $a-b$ dicit debet a *minus* b.

4. *Multiplicatio* quantitatum interdum repraesentatur vel per Crucem S. Andreae, nimirum per signum $\times$, vel per punctum interpositum, sed plerumque per hujusmodi quantitatum conjunctionem, seu adpositionem nullo signo interjecto. Sic tam $a \times b$, quam $a.b$, vel ab denotat multiplicationem quantitatis a per b, vel b per a, quod idem est, semper enim eadem quantitas ex mutua duarum vel plurium magnitudinum multiplicatione progignitur.

5. *Quotus*, vel *quotiens* quantitatis a per quantitatem b divisae exprimitur aut per duo puncta interjecta, velut $a:b$, aut scripto, instar fractionum in arithmetica, divisore infra lineam sub dividendo exaratam, velut $\frac{a}{b}$.

6. Quantitates, quibus signum $+$, vel nullum praefigitur, dicuntur *positivae*, aut *affirmativae*; quibus autem praefigitur signum $-$, dicuntur *negativae*, aut *privativae*, aut *defectivae*.

7. *Termini* quantitatis alicujus vocantur illi, qui signis $+$ & $-$ separantur; sic ab, cd, ef dicuntur termini quantitatis $ab-cd+ef$.

8. Quantitates, quae nullo afficiuntur, vel connectuntur signo, dicuntur *simplices*, *monomiae*, & *incomplexae*, ut ab, abc, $\frac{ad}{e}$, &c. Contra vero vocantur *compositae*, *complexae*, ac *polynomiae*; & quidem *bino-*

mia, si duobus tantum terminis constant, ut $a+b$; $ab-cd$, &c. *trinomia*, si tribus, ut $a+b-c$, $ab-cx+yz$, & ita porro.

9. Signum *æqualitatis* est $=$, ita ut $a=b$ significet, a, & b æquales esse inter se, & $x+y=\frac{a}{z}$ indicet, summam quantitatum x, & y æquari quoto quantitatis a per z divisæ.

10. Signum $a>b$ denotat, a esse *majorem* quam b; contra vero $a<b$ indicat, a *minorem* esse quam b.

11. *Proportionalitas geometrica*, sive quatuor terminorum analogia hoc modo exprimitur $a:b=c:d$; vel sic $a.b::c.d$; si vero est continua, $\div a, b, c$; quod significat, a esse ad b, ut c ad d, vel a ad b, ut b ad c; quare hujusmodi analogia etiam exprimitur per $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (5.); ubi animadvertendum, quartum terminum proportionalem perinde ac fieri solet in celebri Regula aurea, semper exprimi posse per productum secundi, ac tertii termini divisum per terminum primum, quod etiam suo loco constabit. Sic in analogia $a:b=c:d$ quartus terminus d est æqualis producto secundi b, & tertii c per primum a diviso, sive $\frac{bc}{a}$.

12. *Proportionalitas Arithmetica* sic per tria puncta designatur; $a, b \cdot.\cdot c, d$; nimirum differentia inter a & b est eadem quæ inter c, & d, velut $3, 5 \cdot.\cdot 7, 9$.

13. Numeri singulis terminis præfixi dicuntur *coëfficientes*. Sic in binomio $5ab-3cd$ numerus 5 est coëfficiens termini ab, & 3 termini cd; ubi vero nullum si-

ſignum præcedit, unitas pro coëfficiente intelligi debet, velut in trinomio $2ac - ef + 4xy$ terminus ef ponitur ductus in unitatem, ſive $1 \times ef$, quapropter hujus trinomii coëfficientes ſunt 2, 1, 4.

14. *Multiplicia* ſeu *ſubmultiplicia* quantitatum, quæ coëfficientium vices gerunt, generatim & indeterminate exprimi ſolent per literas m, n, r, velut ma, nx, ry, quæ numeros integros vel fractos repræſentare pro libito poſſunt; ſic ſi ſtatuatur $m = 3$, $n = \frac{3}{4}$, $r = \frac{1}{2}$, quantitates ma, nx, ry evadent $3a$, $\frac{3}{4}x$, $\frac{1}{2}y$. Et hic ad memoriam revocandum, *magnitudinum æque multiplices & ſubmultiplices eſſe invicem in ipſarum magnitudinum ratione.*

15. Si quantitas complexa, aut polynomia ſit per aliam multiplicanda, parentheſi includi ſolet, aut linea ſuperducta notari; ita $(a+b-y)\,x$, vel $\overline{a+b-y} \times x$ indicat factum ex quantitate $a+b-y$ in x; eodem modo $(a+b-y)(c-x+z)$, vel $\overline{a+b-y} \times \overline{c-x+z}$ ſignificat factum, ſeu productum ex altera in alteram quantitatem.

16. At ſi quantitas polynomia ſit per aliam dividenda, pari ratione res procedit, niſi quod loco ſignorum multiplicationis ſigna diviſionis, hoc eſt duo puncta, ſint quantitatibus interponenda. Sic $(ab+bc):(c-x+z)$, vel $\overline{ab+bc}:\overline{c-x+z}$ indicat quotum ex diviſione quantitatis $ab+bc$ per alteram $c-x+z$.

17. Infiniti ſignum eſt ∞.

CAPUT II.

De Algorithmo Integrorum.

18. Antequam ulterius progrediamur nonnulla sunt præmittenda. Animadvertendum est enim, signum negativum — quantitati alicui præfixum (ex. gr. $-a$) non solum subtractionem ex quantitatibus præcedentibus cum quibus adnectitur, innuere, sed positionem illi contrariam designare, quam habet $+a$, cum velut quantitas solitaria consideratur, qui duo casus sunt distinguendi; adeoque quantitas negativa $-a$ erit comparate ad positivam $+a$ in sensu opposito accipienda, quod de quibuscumque rebus intelligendum. Esto ad id comprobandum recta PB (*Fig.* 1.), a cujus parte AB subducenda sit portio CB; residuum erit AC. Auferatur ab eadem alia portio DB, remanebit AD. Subtrahatur ab ipsa portio EB, supererit AE. Ab eadem AB auferri modo debeat recta GB ipsa major, hoc est $AB+AG$; post detractam AB, quæ pro residuo dat zero, superest AG, quæ detrahi ab ipsa non potest. Similiter si ab eadem AB demere velimus HB, restat AH, quæ subduci nequit, & ita porro. Rebus sic stantibus, ajo, omnes AC, AD, AE, &c. esse quantitates positivas, & AG, AH, AI, &c. quantitates negativas. Ponatur enim $AB=10$, $CB=9$, erit $AC=10-9=1$; fiat $DB=8$, erit $AD=2$, & sic semper; ergo 1, 2, 3, 4, &c., nimirum AC, AD, AE, &c. sunt quantitates positivæ; esto nunc $AB=10$; $GB=11=10+1$, erit

erit $AB - GB = 10 - 11 = 10 - 10 - 1 = 0 - 1 = -1$; statuatur $HB = 12 = 10 + 2$, erit $AB - HB = 10 - 10 - 2 = -2$, & sic de ceteris; etenim quum quantitates istæ quæ supersunt, nullo modo a numero 10 subduci possint, non solum negant, operationem exactam esse possibilem, sed mensuram determinant, sub qua cadit ista negatio, quare pro quantitatibus negativis necessario sunt habendæ, & signo, quod positivis opponitur, sic prænotandæ; $-1, -2, -3, -4$, &c. sive $-AG, -AH, -AI$, &c. evidentius vero, ob $AB - AB = 0$, per progressionem sequentem exhibendæ &c. $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +$ &c. quæ omnibus enunciatis figuræ affectionibus accurate respondet. Sed quantitates negativæ procedunt ordine opposito comparatæ ad positivas, ut patet; ergo quantitates negativæ sunt semper in statu contrario positivarum, ac proinde in plaga illi prorsus contraria, per quam positivæ progrediuntur, accipiendæ. Hinc

(1.°) Quantitates positivæ dum pergunt ad negativas, transeunt per zero, & vicissim.

(2.°) Termini inter zero, & $+\infty$ intercedentes esse non possunt nisi positivi, & contra.

(3.°) Quantitates negativæ fiunt successive minores, quamvis earum expressio augeatur; quum enim progressum habeant præ positivis retrogradum, necessario debent gradatim imminui, quod etiam constat per positivarum progressum versus zero, quia si istæ imminuuntur quo plus ad zero accedunt, imminutio subsequi etiam debet cum zero prætergrediuntur; quare -5 erit minor quam -3, quamvis in prima expres-

sio major appareat, & potiori jure erit $-5 < +5$. Ubi etiam constat, numerum integrum negativum quemcumque esse nihilo minorem; quæ tamen per calculum exactiorem recipient ubi feret occasio, demonstrationem.

(4.°) Non potest itaque quantitas aliqua sibi ipsi negative sumptæ æqualis esse, nempe $a = -a$; quod etiam sic brevius demonstratur. Esto $a = -a$; pone utrinque $+a$; fiet $a + a = a - a = o$, quod est absurdum.

(5.°) Algebra igitur diverso modo ab Arithmetica communi, & Geometria lineari res considerat, videlicet, non quoad earum magnitudinem tantum, sed quoad signum ipsas comitans, ita ut duæ istæ affectiones separari ubique non possint. Quoniam vero signa rerum statum, vel situm indicant, Algebra rerum, quas suscipit indagandas, magnitudinem simul & statum considerat; quapropter quum quantitas a in statu contrario collocari possit, sub utroque aspectu inspici, ac distingui debet, adeoque rursus admitti non potest $a = -a$. Sic creditum ex. gr. decem argenteorum non est idem ac debitum ejusdem summæ, quamvis sit $10 = 10$, sed primum notandum cum signo $+$, alterum cum signo $-$, quia sunt æquales quoad quantitatem, non quoad statum.

(6.°) Præterea si quantitates a, b sint negativæ, hoc est $-a$ & $-b$, earum summa erit $-a-b$, nam ex quantitatum negativarum collectione oriri non potest nisi aggregatum ex parte negativa totum sumendum.

(7.°) Superest subtractio quantitatis negativæ $-b$ ex positiva $+a$; sed hoc fieri nequit, nisi mutando

de

le more negativæ ſitum, ac proinde ſignum in contrarium, nimirum niſi quantitatem illam tanquam affirmativam conſiderando, ergo ſubtractio iſta in ſummam convertetur, fietque $a+b$. Eadem ratione ſi ex $-a$ ſubduci debeat $-b$, reſiduum erit $-a+b$, vel $b-a$; quod ſic evidentius oſtenditur.

Ex $a+a$ ſubtrahere debeo $a-b$; dico, reſiduum eſſe $a+b$. Si enim ex $a+a$ ſubtraho a, ſubtraho plus quam æquum eſt, & exceſſus eſt ipſa quantitas b, quia quantitas a ponitur imminuta quantitate b; ergo ſubtractioni $a+a-a$ reſtituere debeo b, ex quo fit $a+a-a+b=a+b$. Id in numeris patet. Sed idem eſt ab $a+a$ ſubtrahere $a-b$, quod ab a ſubtrahere $-b$, ergo &c. *Generatim* igitur rerum ſubducendarum ſigna mutari debent.

19. Propoſitio I. *Quantitates tam ſimplices, quam compoſitas addere.*

Reſolutio I. Si quantitates addendæ ſint homogeneæ, ſive per eamdem literam expreſſæ; ſufficit coëfficientes addere, eidemque literæ coëfficientium aggregatum præfigere; ex. gr. ſi addere velimus $3a$ ad $7a$, vel b ad $3b$, ſcribendum erit $10a$, vel $4b$.

II. Si eædem quantitates ſint diverſis ſignis affectæ, capiantur differentiæ; ut ſi habeatur $7a-3a$, ſcribatur $4a$, eodem modo ut addam $3b-b$, ſcribo $2b$.

III. Si vero tam quantitates cum ſuis coëfficientibus, quam ſigna interpoſita varient, ita ex ordine diſponantur, ut quantitates homogeneæ ſibi mutuo reſpondeant, tum acceptis in ſingulis coëfficientium ſummis, vel differentiis, prout indicant ſigna interpoſita, ſummæ hujuſmodi, vel differentiæ ſuis li-

teris

teris prorſus ut ſupra præfigantur. Sint ex. gr. addendæ quantitates

$$\begin{array}{r} 3a - 5b + 4c + 15x \\ 9a + 3b - 4c + 9x \\ \hline \text{Summa erit } 12a - 2b \quad + 24x \end{array}$$

20. Propoſitio II. *Quantitates tam ſimplices, quam compoſitas ſubtrahere.*

Reſolutio I. Si quantitates ſint ſimplices, & ejuſdem generis, ut ſi ex $7a$ ſubtrahi debeat $2a$; ex coëfficiente 7 ſubducatur 2, & reſiduum præfigatur literæ a; remanebit $5a$. Quod ſi quantitates ſint diverſæ, nempe ſi ex a ſubtrahi debeat $3b$; quum ſubtractio fieri nequeat, ſcribatur $a - 3b$.

II. Si quantitates ſint compoſitæ, & diverſi generis, tunc quantitatum ſubducendarum mutentur ſigna (18. n. 7.) & additio, prorſus ut nuper diximus (19.) efficiatur; ex. gr. ſi ex quantitate

$$\begin{array}{rl} 3a + 7b - 9c + 4x - y & \text{ſubtrahi debeat} \\ -5a - 9b + 3c - 2x, & \text{differentia erit} \\ \hline 8a + 16b - 12c + 6x - y & \end{array}$$

21. Quantitates complexas ſupputandas, prius ad terminos ſimpliciores in omnibus operationibus reductas eſſe, ponimus; ita quantitas $2a + 3b - a - 7b$ reducta evadit $a - 4b$, & ſic de reliquis, quod memoriæ inhæreat.

22. Propoſitio III. *Quantitates tam ſimplices, quam compoſitas multiplicare.*

Re-

Resolutio I. Si quantitates sint simplices, vel monomiæ, multiplicatio fit per literarum conjunctionem, ut diximus (4.), nullo signo interposito; sic *abc*, seu *bac*, seu *cab*, seu *acb*, seu *bca*, seu *cba*, quæ omnia eodem recidunt, indicant productum ex *a* in *b* in *c*, vel ex *ab* in *c*, vel ex *bc* in *a*, &c. quod idem est.

II. Si adsint coëfficientes, isti sunt invicem ducendi, ut in Arithmetica vulgari, & eorum factum facto literarum, seu specierum præfigendum. Sic $2a \times 4b = 8ab$.

III. Si quantitates multiplicandæ sint complexæ, vel polynomiæ, singuli unius quantitatis complexæ termini ducendi sunt successive in omnes alterius complexæ quantitatis terminos eodem modo, quo monuimus in quantitatibus simplicibus.

23. *Scholion.* Antequam ad exempla deveniamus, expedit ad sequentia animum intendere. (1.°) Operatio in commodi ac perspicuitatis gratiam ita est instituenda, ut ex sinistra dexteram versus procedat. (2.°) Productorum partialium termini ordine alphabetico disponantur. (3.°) Quoniam factum *ab* adsumi potest per unitatem divisum, nempe $\frac{ab}{1}$; in quacumque multiplicatione semper erit ut unitas ad unum factorum, ita factor alter ad productum, videlicet $1 : a = b : ab$. (4.°) Quoad signa hæc est Regula. *Eadem signa ponunt, diversa tollunt*, sive eadem signa faciunt +, diversa −; cujus demonstratio ex præcedenti analogia erui facile potest. Etenim quum quatuor termini proportionales non solum eandem rationem quoad quantitatem inter antecedentes & conse-

quen-

quentes; sed etiam quoad signorum uniformitatem; vel contrarietatem servare debeant (18. n. 5.), si magnitudines $+a, +b$, vel $-a, -b$ sint invicem ducendæ, earum factum semper erit affirmativum. Primum patet, secundum sic ostenditur. Revocata superiori analogia, quum primum consequens negativum $-a$ comparate ad suum antecedens 1, quod est affirmativum, signo contrario afficiatur, etiam secundum consequens contrarie signatum esse debet ratione habita ad secundum antecedens $-b$; sed istud est negativum; ergo productum factorum $-a$,

& $-b$ positivum esse debet videlicet $+\frac{ab}{1}$ (11.) $= ab$.

Haud absimili ratiocinio demonstrabitur, productum factorum $-a$, & $+b$, vel $-b$, & $+a$ semper esse $-ab$. (5.°) Hinc quantitates in analogia $1:3 = 6: -18$, pariterque $-1:-3 = -6:18$, esse non possunt proportionales, idque multo magis quod extremorum productum producto mediorum æquale esse nequit (18. n. 4. & 5.). (6.°) Productum ab tam oriri potest ex $a \times b$, quam ex $-a \times -b$; itidem aa tam prodit ex a in a, quam ex $-a$ in $-a$; quantitas vero negativa $-ab$ tam exurgit ex a in $-b$, quam ex $-a$ in b. (7.°) Loco quantitatis aa vel bb scribi solet a^2, aut b^2, & loco $aabb$ scribitur a^2b^2; similiter loco aaa, vel $aaaa$ scribitur compendiose a^3, vel a^4, qui numeri quantitatibus, seu speciebus algebricis ad dexteram imminentes, dicuntur *Exponentes*,

vel *Indices*; generatim vero quantitatis a^m exponens, vel index m numerum quemvis (14) repræsentare po-

poteſt; ſive innuit, quantitatem a toties in ſe ductam eſſe, quot unitates una minus inſunt in m; quod de aliis quoque indeterminatis exponentibus, puta n, p, &c. intelligendum. (8.°) Aliud eſt $2a$, vel $3a$, aliud a^2, vel a^3; in primo enim caſu $2a = a + a$, & $3a = a + a + a$ ſummam denotant; in ſecundo $a^2 = a.a$, & $a^3 = a.a.a$ multiplicationem ſignificant. Nunc ad Exempla

Exemplum I. Quantitates compoſitæ invicem multiplicandæ ad ſimpliciores terminos, ſi oporteat, jam redactæ (21.) ſint A, & B; productum ex factis C, D ſimul additis erit E. Etenim ducendo primum terminum x quantitatis B in ſingulos terminos quantitatis A, provenit C; pariterque per ejuſdem quantitatis B ſecundum terminum $-4ax$ multiplicando ſingulos terminos quantitatis A, emergit D; quare facta C, & D addendo, ut ſupra docuimus, obtinebitur productum E, quod quærebatur.

$$\begin{array}{lllll} A & 3x + & 2ax - 3 & & \\ B & x - & 4ax & & \\ \hline C & 3x^2 + & 2ax^2 - 3x & & \\ D & & -12ax^2 - 8a^2x^2 + 12ax & & \\ \hline E & 3x^2 - & 10ax^2 - 3x - 8a^2x^2 + 12ax & & \end{array}$$

Exemplum II.

$$\begin{array}{l} a - 2b + 3c \\ 2a + 4b - 5c \\ \hline 2aa - 4ab + 6ac - 8bb + 12bc - 15cc \\ \quad + 4ab - 5ac \quad + 10bc \\ \hline 2a^2 \quad + ac - 8b^2 + 22bc - 15c^2 \end{array}$$

24.

24. Propoſitio IV. *Quantitates tam ſimplices, quam compoſitas dividere.*

Reſolutio I. Si dividi debeat quantitas ſimplex ab per a, deleta communi a, remanebit quotus b; quum enim quotus ſit etiam $\frac{ab}{a}$ (5.), fiet analogia $a : a = b : b$, adeoque b erit quotus quæſitus.

II. Si adſint coëfficientes, coëfficientium diviſio more arithmetico, quantitatum literalium more algebrico ſeorſum peragatur. Sic dividendo $9ax$ per $3x$, quotus erit $3a$, & $\frac{4ab}{8b} = \frac{1}{2}a$.

III. Si nulla in diviſore & dividendo occurrat quantitas communis elidenda, quotus inſtar fractionis exprimitur, velut $\frac{ab}{c}$, $\frac{3ax}{5y}$.

IV. Si quantitates ſint complexæ, diviſio, ut in arithmetica vulgari, perficitur, nihilque refert, utrum a ſiniſtra, an a dextra operatio inſtituatur.

25. *Scholion* I. Animadvertendum interea (1.°) deſtrui per diviſionem quidquid per multiplicationem factum fuit. Sic ſi multiplicando $2ab$ per $3bc$ habetur $6ab^2c$, dividendo $6ab^2c$ per $3bc$ habebitur $2ab$. (2.°) Quoniam quotus $\frac{a}{b}$ adſumi poteſt per unitatem multiplicatus, nempe $\frac{a \times 1}{b}$; in quacumque diviſione erit ſemper ut diviſor ad dividendum, ita unitas ad quotum, nimirum $b : a = 1 : \frac{a}{b}$. (3.°) Quapropter hic quoque in ſignis tractandis valet ſuperior Re-

Regula, *eadem signa ponunt, diversa tollunt*; nam ividendo $+a$ per $+b$ quotus erit affirmativus, neme $\frac{+a}{+b}$, sive $\frac{a}{b}$; & dividendo $-a$ per $-b$, quotus rit pariter positivus, videlicet $\frac{a}{b}$; at dividendo $+a$ er $-b$, quotus fiet negativus, hoc est $\frac{-a}{b}$; hinc $\frac{a}{-b}$: $\frac{-a}{b}$, & $\frac{2ab}{-4a} = -\frac{1}{2}b$; idque per rationes in mulplicatione nuper (23. n. 4.) allatas. Sed Regulæ ones quoad signa clarius infra demonstrabuntur. Ut item in divisione facienda operationis ordo distinius intelligatur, descendamus ad exempla.

Exemplum I. Sit dividendum polynomium A per lynomium B; quotus erit C.

$(a+b)$	A	$ae-af+ag+be-bf+bg$		C
		$-ae$	$-be$	$+e$
	D	$-af+ag$	$-bf+bg$	$-f$
		$+af$	$+bf$	
	E	ag	$+bg$	$+g$
		$-ag$	$-bg$	
		o	o	

Divide ae per a, & quotum $+e$, qui divisionis est nus terminus, pone ad dexteram ultra lineam ver-

verticalem in columna *C*, ut in paradigmate; per hunc quotum multiplica divisorem *B*, & factum $ae + be$ subtrahe ex dividendo *A*, habebisque residuum *D*. Rursus hujus residui primum terminum $-af$ divide per a, & quotum $-f$ inde emergentem colloca in *C*, quo ducto ut supra in divisorem *B*, prodibit factum $-af-bf$ subducendum ex dividendo *D*, & obtinebis residuum *E*. Denique dividendo ag per a, quotus erit $+g$, per quem multiplicato divisore *B*, productum $ag+bg$ detrahe ex residuo *E*, & nihil remanebit. Quotus igitur quæsitus erit $e-f+g$.

Exemplum II.

$$
\begin{array}{r|r|l}
3x-2 & 3x^4+9ax^3-2x^3-6ax^2-81x+56 & +x^3 \\
 & -3x^4 \quad +2x^3 \qquad\qquad\qquad & \\
\hline
 & 9ax^3-6ax^2-81x+56 & +3ax^2 \\
 & -9ax^3+6ax^2 \qquad\quad & \\
\hline
 & -81x+56 & -27 \\
 & +81x-54 & \\
\hline
 & +2 & \frac{+2}{3x-2}
\end{array}
$$

Ex hoc secundo Exemplo apparet, quod si peracta divisione aliquid supersit, huic more arithmetico subscribendus sit divisor, lineola interposita.

Exemplum III.

$$
\begin{array}{r|r|l}
z^2+6z+9 & z^4+7z^3+9z^2-27z-54 & z^2 \\
 & -z^4-6z^3-9z^2 \qquad\qquad & \\
\hline
 & z^3-27z-54 & +z \\
 & -z^3-9z-6z^2 & \\
\hline
 & -6z^2-36z-54 & -6 \\
 & +6z^2+36z+54 & \\
\hline
 & 0 \quad 0 \quad 0 &
\end{array}
$$

26. *Scho-*

26. *Scholion* II. Ceterum (1.°) pro divisione instituenda sumi potest ex divisore composito terminus quilibet, dummodo per hunc primum divisoris terminum primus dividendi terminus sit divisibilis. Sic in primo Exemplo loco a in divisore terminus b adhiberi potuisset, si primus dividendi terminus fuisset $-be$, vel $-bf$, vel $+bg$, tunc enim idem quotus prodiisset. Sed ut divisio expeditior evadat, dividendus & divisor ita ex ordine disponi debent, ut litera illa, seu species utrique communis, quæ ad divisionem aptior censetur, ex majori exponente ad proxime minorem gradatim descendat, secus calculus nimis implexus, immo inextricabilis interdum evaderet. (2.°) Possumus etiam vicissim exordium capere a quantitatibus minori exponente præditis ad majores sensim pergendo, sed methodus exhibita facilior, & tutior. (3.°) Si quantitas aliqua communis in singulis terminis tam divisoris quam dividendi reperiatur, ejus ablatio ad majorem subsequentis operationis simplicitatem conducit. (4.°) Divisio vero tunc rite peracta erit, cum factum ex quoto in divisorem restituit dividendum. Sic ducto in primo Exemplo quoto C in divisorem B, quoniam dividendus A rursus oritur, divisio rite peracta censeri debet.

27. Propositio V. *Regulas allatas in signis tractandis brevius, ac perspicue demonstrare.*

Resolutio I. Ab $a+b$ subtrahi debeat $c-c$; ergo ut residuum remaneat $a+b$, oportet, ut sit $a-(-c)=+c$, vel $b-(-c)=b+c$.

II. Facta singula $a(b-b)$, $b(a-a)$ sunt $=0$; ergo tam $-b\times a$, quam $-a\times b=-ab$.

III. Factum $-a(b-b)=0$; ergo $-a\times-b=+ab$.

IV. Quotus $\frac{a}{-b}=\frac{-1\times-1\times a}{-1\times b}$ (per n.II.& III.);

ergo $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$ (24. n. I.).

V. Quotus $\frac{-a}{-b}=\frac{-1\times a}{-1\times b}$; ergo $\frac{-a}{-b}=\frac{+a}{+b}$. *Quod erat* &c.

CAPUT III.

De Divisoribus.

28. PRop. I. *Datam quantitatem rationalem in suos divisores integros resolvere.*

Resolutio I. Ut a numeris ordiamur, numerus datus dividatur primo per 2, si potest, & usquequo potest; deinde divisio si potest, & usquequo potest, repetatur per 3; tum idem peragatur per subsequentes numeros primos, per eos scilicet, quos unitas tantum metitur, ut 5, 7, &c.

II. Numerus datus, & quoti ex repetitis divisionibus prodeuntes scribantur in columna sub litera *A*, divisores in columna sub litera *B*, ut in paradigmate, & sic habebuntur divisores simplices; ex.gr. numerus datus esto 180. Hunc divido per 2, & provenit quotus 90. Scribo 180, & 90 sub litera *A*, & divisorem 2 sub litera *B*, linea verticali interjecta. Quo-

A	B
180	2,
90	2, 4,
45	3, 6,12,
15	3, 9,18,36,
5	5,10,15,20,30,45,60,90,180.
1	

Quoniam vero 90 eſt adhuc diviſibilis per 2, ſcribo ſecundum diviſorem 2 infra primum 2 in *B*, & quotum 45 infra quotum 90 in *A*; quum autem 45 non ſit amplius diviſibilis per 2, ſed per 3, quem pono infra ſecundum diviſorem 2, colloco quotum 15 infra quotum 45. Præterea, quum quotus 15 ſit rurſus diviſibilis per 3, poſito ſecundo diviſore 3 infra primum, colloco quotum 5 infra 15. Demum quia quotus 5 diviſus per 5 dat 1, ſcripto diviſore 5 infra ſecundum diviſorem 3 in *B*, ſcribo quotum 1 infra quotum 5 in *A*.

III. Ut diviſores compoſitos obtineam, duco primum diviſorem 2 in ſecundum 2, & productum 4 pono ad latus ſecundi diviſoris. Deinde duos primos diviſores 2, & 2, & productum 4 jam inventum duco in tertium diviſorem 3, & prodeunt 6, & 12, quos unum poſt alium colloco pone tertium diviſorem 3. Tum numeros omnes jam inventos, nimirum 2, 4, 3, 6, 12 multiplico per quartum diviſorem 3, & ſingula producta 9, 18, 36 ſcribo ut ſupra ad latus ejuſdem quarti diviſoris 3, & ſic deinceps, rejectis ſupervacaneis, ſive repetitis, ſi qui adſunt; & omnes integri diviſores numeri dati 180. ſic reperiuntur.

IV. Eadem est operatio in quantitatibus analyticis. Esto quantitas *abbcd*, cujus omnes divisores quærantur.

Quantitate *abbcd* sub *A* scripta, inveniantur primum omnes

A	*B*
abbcd	*a*
bbcd	*b*, *ab*,
bcd	*b*, *bb*, *abb*,
cd	*c*, *ac*, *bc*, *abc*, *bbc*, *abbc*,
d	*d*, *ad*, *bd*, *abd*, *bbd*, *abbd*, *cd*, *acd*, *bcd*, *abcd*, *bbcd*, *abbcd*.
1	

divisores simplices, qui ut prius infra *B* secus lineam verticalem literas *A*; *B* dirimentem collocentur; singuli autem quoti eodem modo infra *A* ponantur; deinde multiplicato secundo divisore *b* per primum *a*, factum *ab* juxta ipsum secundum divisorem *b* scribatur; tum ductis quantitatibus *a*, *b*, *ab* in tertium divisorem *b*, producta *bb*, *abb* ad latus ejusdem ponantur, rejecto *ab*, quia jam aderat, & ita porro; atque divisores omnes quæsiti, ut in paradigmate, eruentur. Ex quibus operationibus patet, inventis divisoribus simplicibus, omnes divisores compositos facile haberi posse, si singuli, bini, terni, quaterni &c. invicem ducantur.

V. Proponi etiam potest quantitas aliqua constans ex numeris, & literis, cujus divisores omnes sint investigandi; ex. gr. sit 12*abc*. Hujus divisores simplices sunt 2, 2, 3, *a*, *b*, *c*; hos inter numerari non debet 4, numerus quippe compositus, quod eum unitas sola

non

non metitur. Divisores bini, amotis superfluis, sunt $4, 6, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 3c, ab, ac, bc$. Terni sunt $12, 4a, 4b, 4c, 6a, 6b, 6c, 2ab, 2ac, 2bc, 3ab, 3ac, 3bc, abc$. Quaterni sunt $12a, 12b, 12c, 4ab, 4ac, 4bc, 6ab, 6ac, 6bc, 2abc, 3abc$. Quini sunt $12ab, 12ac, 12bc, 4abc, 6abc$. Seni demum eadem quantitas $12abc$, queis unitas de more addi debet, atque hinc divisores omnes quæsiti simul colligi possunt.

VI. Proposita sit quantitas composita $4aab-2abx$; eadem est methodus. En calculi typum.

A	B
$4aab-2abx$	2
$2aab-abx$	$2, 2a,$
$2ab-bx$	$b, 2b, ab, 2ab,$
$2a-x$	$2a-x, 4a-2x, 2aa-ax, 4aa-2ax, 2ab-bx, 4ab-2bx, 2aab-abx, 4aab-2abx$
1	

29. Propositio II. *Maximum communem Divisorem, qui quantitates datas metitur, invenire.*

Resolutio I. Quantitates datæ sint A, & B, sitque $A>B$; dividatur A per B, & quotus erit $\frac{A}{B}$; quare si B perfecte metitur A, erit B maximus divisor; at si quotus $\frac{A}{B}$ sit integer cum fracto, nempe $a+\frac{C}{B}$, neglecta integra quantitate a, quoniam C dividi non potest per B, dividatur B per C, & si rursus quotus $\frac{B}{C}$ sit integer cum fracto, nimirum $=b+\frac{D}{C}$, negle-

cta denuo quantitate b, invertatur fractio, ut sit $\frac{C}{D}$, ac divisio repetatur; tunc si D perfecte metitur C, erit D maximus communis divisor quæsitus. Hac igitur methodo ab arithmetica deprompta donec oporteat continuata duarum quantitatum A, B maximus communis divisor, si detur, facile investigatur.

Exemplum I. Ponatur $A=153, B=119$; erit $\frac{A}{B}=1+\frac{34}{119}=a+\frac{C}{B}$; quoniam vero $\frac{34}{119}$ dividi nequit, invertatur fractio, & fiat $\frac{119}{34}$; non quia $\frac{119}{34}$ idem sit cum $\frac{34}{119}$, sed quia agitur tantummodo de utroque numero ad simpliciorem expressionem reducendo; erit itaque $\frac{119}{34}=3+\frac{17}{34}=b+\frac{D}{C}$. Invertatur iterum fractio, fiatque $\frac{34}{17}=\frac{C}{D}$; sed 17 perfecte metitur 34; ergo 17 est maximus communis divisor quæsitus, nam $9.17=153$, & $7.17=119$.

II. Ut eadem methodus ad quantitates algebricas applicetur, ad sequentia respiciendum; (1.°) quantitates A, B gradatim ordinentur comparate ad eandem literam, incipiendo ab ejus maximo esponente. (2.°) Si eadem quantitas omnes datarum A, B terminos multiplicet, fiat per ipsam divisio, quæ deinde seorsum ponatur, ut operatione absoluta, maximus communis divisor inventus per eamdem multiplicetur. (3.°) Duæ quantitates A, B eundem maximum communem divisorem semper servabunt, etiamsi earum altera,

era, puta A, multiplicetur aut dividatur per quantitatem aliquam, quæ nullum habeat cum altera B communem divisorem; hujusmodi enim quantitas multiplicans aut dividens esse non potest pars maximi communis divisoris, qui utramque A, B metitur, ut patet, secus utramque ingrederetur contra hypothesim.

Exemplum II. Duæ quantitates, quarum maximus communis divisor investigari debet sint

$$1.^{a}\ \begin{Bmatrix} acd - bcd \\ acf - bcf \\ add - bdd \\ adf - bdf \end{Bmatrix} \qquad 2.^{a}\ \begin{Bmatrix} acg - bcg \\ adg - bdg \\ ach - bch \\ adh - bdh \end{Bmatrix}$$

Ad id præstandum, considero, quantitatem utramque divisibilem esse per $a-b$; in prima enim pro quoto habeo $cd+cf+dd+df$, in altera $cg+dg+ch+dh$; igitur $a-b$ seorsum collocata, iterum animadverto, quoti utriusque maximam communem mensuram esse $c+d$, primus enim quotus ex $(c+d)d+(c+d)f=(c+d)(d+f)$, secundus oritur ex $(c+d)(g+h)$; ergo nil aliud superest, quam ut sepositam quantitatem $a-b$ per $c+d$ multiplicem, quapropter productum $ac+ad-bc-bd$ erit maximus communis divisor quæsitus.

Exemplum III. Proponantur duæ quantitates

$$2abb-2b^3+6a^3-6a^2b;\ \&\ 4a^2+b^2-5ab.$$

Istæ prius ordinentur comparate ad a; atque erunt

$$(A)\ 6a^3-6a^2b+2ab^2-2b^3;\ (B)\ 4a^2-5ab+b^2.$$

Deinde termini primæ (A) dividantur per 2, qui terminis secundæ (B) non est communis, & evadent

$$(C)\ 3a^3-3a^2b+ab^2-b^3;\ (B)\ 4a^2-5ab+b^2.$$

Quoniam vero divisio primæ (C) per secundam (B)

quentes; ſed etiam quoad ſignorum uniformitatem; vel contrarietatem ſervare debeant (18. n. 5.), ſi magnitudines $+a$, $+b$, vel $-a$, $-b$ ſint invicem ducendæ, earum factum ſemper erit affirmativum. Primum patet, ſecundum ſic oſtenditur. Revocata ſuperiori analogia, quum primum conſequens negativum $-a$ comparate ad ſuum antecedens 1, quod eſt affirmativum, ſigno contrario afficiatur, etiam ſecundum conſequens contrarie ſignatum eſſe debet ratione habita ad ſecundum antecedens $-b$; ſed iſtud eſt negativum; ergo productum factorum $-a$,

& $-b$ poſitivum eſſe debet videlicet $+\frac{ab}{1}$ (11.) $= ab$.

Haud abſimili ratiocinio demonſtrabitur, productum factorum $-a$, & $+b$, vel $-b$, & $+a$ ſemper eſſe $-ab$. (5.°) Hinc quantitates in analogia $1:3=6:-18$, pariterque $-1:-3=-6:18$, eſſe non poſſunt proportionales, idque multo magis quod extremorum productum producto mediorum æquale eſſe nequit (18. n. 4. & 5.). (6.°) Productum ab tam oriri poteſt ex $a \times b$, quam ex $-a \times -b$; itidem aa tam prodit ex a in a, quam ex $-a$ in $-a$; quantitas vero negativa $-ab$ tam exurgit ex a in $-b$, quam ex $-a$ in b. (7.°) Loco quantitatis aa vel bb ſcribi ſolet a^2, aut b^2, & loco $aabb$ ſcribitur a^2b^2; ſimiliter loco aaa, vel $aaaa$ ſcribitur compendioſe a^3, vel a^4, qui numeri quantitatibus, ſeu ſpeciebus algebricis ad dexteram imminentes, dicuntur *Exponentes*,

vel *Indices*; generatim vero quantitatis a^m exponens, vel index m numerum quemvis (14) repræſentare

po-

poteſt; ſive innuit, quantitatem a toties in ſe ductam eſſe, quot unitates una minus inſunt in m; quod de aliis quoque indeterminatis exponentibus, puta n, p, &c. intelligendum. (8.°) Aliud eſt $2a$, vel $3a$, aliud a^2, vel a^3; in primo enim caſu $2a = a + a$, & $3a = a + a + a$ ſummam denotant; in ſecundo $a^2 = a.a$, & $a^3 = a.a.a$ multiplicationem ſignificant. Nunc ad Exempla

Exemplum I. Quantitates compoſitæ invicem multiplicandæ ad ſimpliciores terminos, ſi oporteat, jam redactæ (21.) ſint A, & B; productum ex factis C, D ſimul additis erit E. Etenim ducendo primum terminum x quantitatis B in ſingulos terminos quantitatis A, provenit C; pariterque per ejuſdem quantitatis B ſecundum terminum $-4ax$ multiplicando ſingulos terminos quantitatis A, emergit D; quare facta C, & D addendo, ut ſupra docuimus, obtinebitur productum E, quod quærebatur.

$$
\begin{array}{ll}
A & 3x + 2ax - 3 \\
B & x - 4ax \\
\hline
C & 3x^2 + 2ax^2 - 3x \\
D & \quad - 12ax^2 - 8a^2x^2 + 12ax \\
\hline
E & 3x^2 - 10ax^2 - 3x - 8a^2x^2 + 12ax
\end{array}
$$

Exemplum II.

$$
\begin{array}{l}
a - 2b + 3c \\
2a + 4b - 5c \\
\hline
2aa - 4ab + 6ac - 8bb + 12bc - 15cc \\
\quad + 4ab - 5ac \qquad + 10bc \\
\hline
2a^2 \qquad + ac - 8b^2 + 22bc - 15c^2
\end{array}
$$

24.

24. Propositio IV. *Quantitates tam simplices, quam compositas dividere.*

Resolutio I. Si dividi debeat quantitas simplex ab per a, deleta communi a, remanebit quotus b; quum enim quotus sit etiam $\frac{ab}{a}$ (5.), fiet analogia $a : a = b : b$, adeoque b erit quotus quæsitus.

II. Si adsint coëfficientes, coëfficientium divisio more arithmetico, quantitatum literalium more algebrico seorsum peragatur. Sic dividendo $9ax$ per $3x$, quotus erit $3a$, & $\frac{4ab}{8b} = \frac{1}{2}a$.

III. Si nulla in divisore & dividendo occurrat quantitas communis elidenda, quotus instar fractionis exprimitur, velut $\frac{ab}{c}$, $\frac{3ax}{5y}$.

IV. Si quantitates sint complexæ, divisio, ut in arithmetica vulgari, perficitur, nihilque refert, utrum a sinistra, an a dextra operatio instituatur.

25. *Scholion* I. Animadvertendum interea (1.°) destrui per divisionem quidquid per multiplicationem factum fuit. Sic si multiplicando $2ab$ per $3bc$ habetur $6ab^2c$, dividendo $6ab^2c$ per $3bc$ habebitur $2ab$. (2.°) Quoniam quotus $\frac{a}{b}$ adsumi potest per unitatem multiplicatus, nempe $\frac{a \times 1}{b}$; in quacumque divisione erit semper ut divisor ad dividendum, ita unitas ad quotum, nimirum $b : a = 1 : \frac{a}{b}$. (3.°) Quapropter hic quoque in signis tractandis valet superior Re-

Regula, *eadem signa ponunt, diversa tollunt*; nam dividendo $+a$ per $+b$ quotus erit affirmativus, nempe $\frac{+a}{+b}$, sive $\frac{a}{b}$; & dividendo $-a$ per $-b$, quotus erit pariter positivus, videlicet $\frac{a}{b}$; at dividendo $+a$ per $-b$, quotus fiet negativus, hoc est $\frac{-a}{b}$; hinc $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$, & $\frac{2ab}{-4a} = -\frac{1}{2}b$; idque per rationes in multiplicatione nuper (23. n. 4.) allatas. Sed Regulæ omnes quoad signa clarius infra demonstrabuntur. Ut autem in divisione facienda operationis ordo distinctius intelligatur, descendamus ad exempla.

Exemplum I. Sit dividendum polynomium A per polynomium B; quotus erit C.

$B\ (a+b)$	A	$ae - af + ag$	$+ be - bf + bg$	C
		$-ae$	$-be$	$+e$
	D	$-af + ag$	$-bf + bg$	$-f$
		$+af$	$+bf$	
	E	ag	$+bg$	$+g$
		$-ag$	$-bg$	
		o	o	

Divide ae per a, & quotum $+e$, qui divisionis est primus terminus, pone ad dexteram ultra lineam ver-

verticalem in columna *C*, ut in paradigmate; per hunc quotum multiplica diviſorem *B*, & factum $ae + be$ ſubtrahe ex dividendo *A*, habebiſque reſiduum *D*. Rurſus hujus reſidui primum terminum $-af$ divide per a, & quotum $-f$ inde emergentem colloca in *C*, quo ducto ut ſupra in diviſorem *B*, prodibit factum $-af-bf$ ſubducendum ex dividendo *D*, & obtinebis reſiduum *E*. Denique dividendo ag per a, quotus erit $+g$, per quem multiplicato diviſore *B*, productum $ag+bg$ detrahe ex reſiduo *E*, & nihil remanebit. Quotus igitur quæſitus erit $e-f+g$.

Exemplum II.

Divisor	Dividendum	Quotus
$3x-2$	$3x^4+9ax^3-2x^3-6ax^2-81x+56$	$+x^3$
	$-3x^4 \quad +2x^3$	
	$9ax^3-6ax^2-81x+56$	$+3ax^2$
	$-9ax^3+6ax^2$	
	$-81x+56$	-27
	$+81x-54$	
	$+2$	$\frac{+2}{3x-2}$

Ex hoc ſecundo Exemplo apparet, quod ſi peracta diviſione aliquid ſuperſit, huic more arithmetico ſubſcribendus ſit diviſor, lineola interpoſita.

Exemplum III.

Divisor	Dividendum	Quotus
z^2+6z+9	$z^4+7z^3+9z^2-27z-54$	z^2
	$-z^4-6z^3-9z^2$	
	$z^3-27z-54$	$+z$
	$-z^3-9z-6z^2$	
	$-6z^2-36z-54$	-6
	$+6z^2+36z+54$	
	$0 \quad 0 \quad 0$	

26. *Scho-*

26. *Scholion* II. Ceterum (1.°) pro divisione instituenda sumi potest ex divisore composito terminus quilibet, dummodo per hunc primum divisoris terminum primus dividendi terminus sit divisibilis. Sic in primo Exemplo loco a in divisore terminus b adhiberi potuisset, si primus dividendi terminus fuisset $+be$, vel $-bf$, vel $+bg$, tunc enim idem quotus prodiisset. Sed ut divisio expeditior evadat, dividendus & divisor ita ex ordine disponi debent, ut litera illa, seu species utrique communis, quæ ad divisionem aptior censetur, ex majori exponente ad proxime minorem gradatim descendat, secus calculus nimis implexus, immo inextricabilis interdum evaderet. (2.°) Possumus etiam vicissim exordium capere a quantitatibus minori exponente præditis ad majores sensim pergendo, sed methodus exhibita facilior, & tutior. (3.°) Si quantitas aliqua communis in singulis terminis tam divisoris quam dividendi reperiatur, ejus sublatio ad majorem subsequentis operationis simplicitatem conducit. (4.°) Divisio vero tunc rite peracta erit, cum factum ex quoto in divisorem restituit dividendum. Sic ducto in primo Exemplo quoto C in divisorem B, quoniam dividendus A rursus oritur, divisio rite peracta censeri debet.

27. Propositio V. *Regulas allatas in signis tractandis brevius, ac perspicue demonstrare.*

Resolutio I. Ab $a+b$ subtrahi debeat $c-c$; ergo ut residuum remaneat $a+b$, oportet, ut sit $a-(-c) = a+c$, vel $b-(-c) = b+c$.

II. Facta singula $a(b-b)$, $b(a-a)$ sunt $=0$; ergo tam $-b \times a$, quam $-a \times b = -ab$.

III. Factum $-a(b-b)=0$; ergo $-a\times-b=+ab$.

IV. Quotus $\frac{a}{-b}=\frac{-1\times-1\times a}{-1\times b}$ (per n.II.& III.); ergo $\frac{a}{-b}=\frac{-a}{b}$ (24. n. I.).

V. Quotus $\frac{-a}{-b}=\frac{-1\times a}{-1\times b}$; ergo $\frac{-a}{-b}=\frac{+a}{+b}$. *Quod erat* &c.

CAPUT III.

De Divisoribus.

28. PRop. I. *Datam quantitatem rationalem in suos divisores integros resolvere.*

Resolutio I. Ut a numeris ordiamur, numerus datus dividatur primo per 2, si potest, & usquequo potest; deinde divisio si potest, & usquequo potest, repetatur per 3; tum idem peragatur per subsequentes numeros primos, per eos scilicet, quos unitas tantum metitur, ut 5, 7, &c.

II. Numerus datus, & quoti ex repetitis divisionibus prodeuntes scribantur in columna sub litera *A*, divisores in columna sub litera *B*, ut in paradigmate, & sic habebuntur divisores simplices; ex.gr. numerus datus esto 180. Hunc divido per 2, & provenit quotus 90. Scribo 180, & 90 sub litera *A*, & divisorem 2 sub litera *B*, linea verticali interjecta. Quo-

A	B
180	2,
90	2, 4,
45	3, 6,12,
15	3, 9,18,36,
5	5,10,15,20,30,45,60,90,180.
1	

Quoniam vero 90 eſt adhuc diviſibilis per 2, ſcribo ſecundum diviſorem 2 infra primum 2 in *B*, & quotum 45 infra quotum 90 in *A*; quum autem 45 non ſit amplius diviſibilis per 2, ſed per 3, quem pono infra ſecundum diviſorem 2, colloco quotum 15 infra quotum 45. Præterea, quum quotus 15 ſit rurſus diviſibilis per 3, poſito ſecundo diviſore 3 infra primum, colloco quotum 5 infra 15. Demum quia quotus 5 diviſus per 5 dat 1, ſcripto diviſore 5 infra ſecundum diviſorem 3 in *B*, ſcribo quotum 1 infra quotum 5 in *A*.

III. Ut diviſores compoſitos obtineam, duco primum diviſorem 2 in ſecundum 2, & productum 4 pono ad latus ſecundi diviſoris. Deinde duos primos diviſores 2, & 2, & productum 4 jam inventum duco in tertium diviſorem 3, & prodeunt 6, & 12, quos unum poſt alium colloco pone tertium diviſorem 3. Tum numeros omnes jam inventos, nimirum 2, 4, 3, 6, 12 multiplico per quartum diviſorem 3, & ſingula producta 9, 18, 36 ſcribo ut ſupra ad latus ejuſdem quarti diviſoris 3, & ſic deinceps, rejectis ſupervacaneis, ſive repetitis, ſi qui adſunt; & omnes integri diviſores numeri dati 180. ſic reperiuntur.

IV. Eadem est operatio in quantitatibus analyticis. Esto quantitas *abbcd*, cujus omnes divisores quærantur.

Quantitate *abbcd* sub *A* scripta, inveniantur primum omnes

A	*B*
abbcd	*a*
bbcd	*b*, *ab*,
bcd	*b*, *bb*, *abb*,
cd	*c*, *ac*, *bc*, *abc*, *bbc*, *abbc*,
d	*d*, *ad*, *bd*, *abd*, *bbd*, *abbd*, *cd*, *acd*, *bcd*, *abcd*, *bbcd*, *abbcd*.
1	

divisores simplices, qui ut prius infra *B* secus lineam verticalem literas *A*; *B* dirimentem collocentur; singuli autem quoti eodem modo infra *A* ponantur; deinde multiplicato secundo divisore *b* per primum *a*, factum *ab* juxta ipsum secundum divisorem *b* scribitur; tum ductis quantitatibus *a*, *b*, *ab* in tertium divisorem *b*, producta *bb*, *abb* ad latus ejusdem ponantur, rejecto *ab*, quia jam aderat, & ita porro; atque divisores omnes quæsiti, ut in paradigmate, eruentur. Ex quibus operationibus patet, inventis divisoribus simplicibus, omnes divisores compositos facile haberi posse, si singuli, bini, terni, quaterni &c. invicem ducantur.

V. Proponi etiam potest quantitas aliqua constans ex numeris, & literis, cujus divisores omnes sint investigandi; ex. gr. sit 12*abc*. Hujus divisores simplices sunt 2, 2, 3, *a*, *b*, *c*; hos inter numerari non debet 4, numerus quippe compositus, quod eum unitas sola

non

non metitur. Divisores bini, amotis superfluis, sunt $4, 6, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 3c, ab, ac, bc$. Terni sunt $12, 4a, 4b, 4c, 6a, 6b, 6c, 2ab, 2ac, 2bc, 3ab, 3ac, 3bc, abc$. Quaterni sunt $12a, 12b, 12c, 4ab, 4ac, 4bc, 6ab, 6ac, 6bc, 2abc, 3abc$. Quini sunt $12ab, 12ac, 12bc, 4abc, 6abc$. Seni demum eadem quantitas $12abc$, queis unitas de more addi debet, atque hinc divisores omnes quæsiti simul colligi possunt.

VI. Proposita sit quantitas composita $4aab-2abx$; eadem est methodus. En calculi typum.

A	B
$4aab-2abx$	2
$2aab-abx$	$1, 2a,$
$2ab-bx$	$b, 2b, ab, 2ab,$
$2a-x$	$2a-x, 4a-2x, 2aa-ax, 4aa-2ax, 2ab-bx, 4ab-2bx, 2aab-abx, 4aab-2abx$
1	

29. Propositio II. *Maximum communem Divisorem, qui quantitates datas metitur, invenire.*

Resolutio I. Quantitates datæ sint A, & B, sitque $A>B$; dividatur A per B, & quotus erit $\frac{A}{B}$; quare si B perfecte metitur A, erit B maximus divisor; at si quotus $\frac{A}{B}$ sit integer cum fracto, nempe $a+\frac{C}{B}$, neglecta integra quantitate a, quoniam C dividi non potest per B, dividatur B per C, & si rursus quotus $\frac{B}{C}$ sit integer cum fracto, nimirum $=b+\frac{D}{C}$, negle-

ĉta denuo quantitate b, invertatur fraĉtio, ut ſit $\frac{C}{D}$, ac diviſio repetatur; tunc ſi D perfeĉte metitur C, erit D maximus communis diviſor quæſitus. Hac igitur methodo ab arithmetica deprompta donec oporteat continuata duarum quantitatum A, B maximus communis diviſor, ſi detur, facile inveſtigatur.

Exemplum I. Ponatur $A = 153, B = 119$; erit $\frac{A}{B} = 1 + \frac{34}{119} = a + \frac{C}{B}$; quoniam vero $\frac{34}{119}$ dividi nequit, invertatur fraĉtio, & fiat $\frac{119}{34}$; non quia $\frac{119}{34}$ idem ſit cum $\frac{34}{119}$, ſed quia agitur tantummodo de utroque numero ad ſimpliciorem expreſſionem reducendo; erit itaque $\frac{119}{34} = 3 + \frac{17}{34} = b + \frac{D}{C}$. Invertatur iterum fraĉtio, fiatque $\frac{34}{17} = \frac{C}{D}$; ſed 17 perfeĉte metitur 34; ergo 17 eſt maximus communis diviſor quæſitus, nam $9 . 17 = 153$, & $7 . 17 = 119$.

II. Ut eadem methodus ad quantitates algebricas applicetur, ad ſequentia reſpiciendum; (1.°) quantitates A, B gradatim ordinentur comparate ad eandem literam, incipiendo ab ejus maximo eſponente. (2.°) Si eadem quantitas omnes datarum A, B terminos multiplicet, fiat per ipſam diviſio, quæ deinde ſeorſum ponatur, ut operatione abſoluta, maximus communis diviſor inventus per eamdem multiplicetur. (3.°) Duæ quantitates A, B eundem maximum communem diviſorem ſemper ſervabunt, etiamſi earum altera,

tera, puta A, multiplicetur aut dividatur per quantitatem aliquam, quæ nullum habeat cum altera B communem divisorem; hujusmodi enim quantitas multiplicans aut dividens esse non potest pars maximi communis divisoris, qui utramque A, B metitur, ut patet, secus utramque ingrederetur contra hypothesim..

Exemplum II. Duæ quantitates, quarum maximus communis divisor investigari debet sint

$$1.^a \left\{ \begin{matrix} acd - bcd \\ acf - bcf \\ add - bdd \\ adf - bdf \end{matrix} \right\} \qquad 2.^a \left\{ \begin{matrix} acg - bcg \\ adg - bdg \\ ach - bch \\ adh - bdh \end{matrix} \right\}$$

Ad id præstandum, considero, quantitatem utramque divisibilem esse per $a-b$; in prima enim pro quoto habeo $cd+cf+dd+df$, in altera $cg+dg+ch+dh$; igitur $a-b$ seorsum collocata, iterum animadverto, quoti utriusque maximam communem mensuram esse $c+d$, primus enim quotus ex $(c+d)d+(c+d)f = (c+d)(d+f)$, secundus oritur ex $(c+d)(g+h)$; ergo nil aliud superest, quam ut sepositam quantitatem $a-b$ per $c+d$ multiplicem, quapropter productum $ac+ad-bc-bd$ erit maximus communis divisor quæsitus.

Exemplum III. Proponantur duæ quantitates

$$2abb-2b^3+6a^3-6a^2b; \ \& \ 4a^2+b^2-5ab.$$

Istæ prius ordinentur comparate ad a; atque erunt

$$(A)\ 6a^3-6a^2b+2ab^2-2b^3; \ (B)\ 4a^2-5ab+b^2.$$

Deinde termini primæ (A) dividantur per 2, qui terminis secundæ (B) non est communis, & evadent

$$(C)\ 3a^3-3a^2b+ab^2-b^3; \ (B)\ 4a^2-5ab+b^2.$$

Quoniam vero divisio primæ (C) per secundam (B)

 in-

inchoari non potest, quod primus terminus, $3a^3$ dividendi non continet accurate primum divisoris terminum $4aa$, multiplico (*C*) per 4, qui terminis quantitatis (*B*) non est communis, & quantitates, quarum maximus divisor communis quæritur, in sequentes migrant, nempe

(*D*) $12a^3-12a^2b+4ab^2-4b^3$; (*B*) $4a^2-5ab+b^2$.

Instituta divisione, provenit pro quoto $3a$, & pro residuo quantitas (*E*) $3a^2b+ab^2-4b^3$ per (*B*) dividenda. Sed quia *b* communis est omnibus terminis quantitatis (*E*), non autem omnibus terminis quantitatis (*B*), divido per *b* terminos (*E*), & prodit (*F*) $3a^2+ab-4b^2$.

Interea ut divisio (*B*) per (*F*) perfici possit, multiplico (*B*) per 3, qui ipsius (*F*) non est divisor communis, & habeo (*G*) $12a^2-15ab+3b^2$; quare si divido (*G*) per (*F*), pro quoto obtineo 4, & pro residuo (*H*) $-19ab+19b^2$.

Antequam de more dividam (*F*) per (*H*), iterum animadverto, $19b$ dividere terminos (*H*), non autem (*F*), quapropter dividendo prius (*H*) per $19b$, remanet (*I*) $-a+b$; sed (*I*) perfecte metitur (*F*), nimirum $3a^2+ab-4b^2$; ergo $-a+b$ est maximus communis divisor quantitatum (*F*) & (*H*); ergo & (*G*) & (*F*); ergo (*B*) & (*E*); ergo (*D*) & (*B*); ergo tandem (*A*) & (*B*).

30. *Scholion* I. Poterant etiam quantitates propositæ ordinari comparate ad literam *b*, ut calculum ineunti palam fiet, nam idem maximus communis divisor $b-a$ prodibit. Ceterum Analysta exercitatione aliqua præditus sine methodi præcedentis ope voti

ti compos interdum fieri potest. Sint ex. gr. duæ formulæ $a^2x^2 - a^2b^2 + b^4 - b^2x^2$, & $4a^2x - 2ab^2 - 4abx + 2b^3$. Has ita dispono; $(a^2 - b^2)x^2 + b^4 - a^2b^2$; $(4a^2 - 4ab)x + 2b^3 - 2ab^2$. Quia vero $b^4 - a^2b^2 = -b^2(a^2 - b^2)$, liquet, $a^2 - b^2$ esse primæ formulæ divisorem. Præterea animadverto, esse $a - b$ divisorem formulæ alterius, nam $4a^2 - 4ab = (a-b)4a$, & $2b^3 - 2ab^2 = -2b^2(a-b)$; sed $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, ideoque per $a-b$ dividi potest; ergo $a-b$ est formularum datarum divisor, qui præbet quotientes $(x^2-b^2)(a+b)$, & $4ax - 2b^2$; quarum quantitatum quum nullus alius sit divisor communis, patet, $a-b$, vel $b-a$ esse maximum formularum propositarum communem divisorem. Dixi vel $b-a$, quia $a^2 - b^2$ esse quoque potest $= (b-a) \times - b \times - a$; $4a^2 - 4ab = -4a(b-a)$; & $2b^3 - 2ab^2 = (b-a)2b^2$.

31. *Scholion* II. Si trium quantitatum maximus communis divisor postuletur, quæratur primo pro duabus, tum idem fiat pro tertia, & divisore duarum primarum jam invento. Si datæ quantitates sint quatuor, quæratur maximus divisor communis quartæ, & maximi communis divisoris trium reliquarum, & ita porro. Sed hæc rarius occurrunt.

Quod si methodis hisce, vel consimilibus rite adhibitis votum adsequi non possumus, quantitates datas maximo communi divisore carere, concludendum est.

CA-

CAPUT IV.

De Algorithmo Fractionum.

32. Quælibet fractio est indicatio operationis peragendæ, in qua numerator dividendi, denominator divisoris vices gerit, fractionis autem valor est quotus; Hinc

(1.°) Si fractionis alicujus tam numerator, quam denominator per eamdem vel æqualem quantitatem multiplicentur, aut dividantur, fractionis valor non immutatur. Sic si $\frac{a}{b}$ multiplicetur supra & infra lineolam per c, proveniet $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, nam $c:c = \frac{a}{b} : \frac{a}{b}$. Itidem dividendo $\frac{ac}{b}$ per c, fit idem quotus $\frac{a}{b}$, & $\frac{ab-bd}{ac-cd}$ per $a-d$, fit $\frac{b}{c}$.

(2.°) Fractiones quantitatum compositarum ad simpliciorem expressionem sunt reducibiles, cum communis divisor tam numeratoris, quam denominatoris haberi potest.

(3.°) Quantitas quævis nec augetur, nec minuitur, si per unitatem multiplicetur, aut dividatur; quum enim sit $1 = \frac{c}{c} = \frac{a-d}{a-d}$, &c. quantitas quævis per 1 multiplicata eadem remanet ac proinde in unitatem ducta semper admitti potest; quare per unitatem divisa eadem remanere debet.

(4.°)

(4.°) Quantitas integra in fractionem migrat, si pro ejus denominatore unitas infra lineolam collocetur, ut $\frac{ab}{1}$, $\frac{a-b+c}{1}$.

(5.°) Integra quantitas in fractionem dati denominatoris transformatur, si in eundem datum denominatorem ducatur, simulque hic infra lineolam scribatur. Sic a reducta in fractionem, cujus denominator b, fit $\frac{ab}{b}$; proptereaque quantitas integra cum fracta, ut $a+\frac{bd}{c}$, ad fractam tota reducitur, si scribatur $\frac{ac+bd}{c}$.

33. Propositio I. *Fractiones ad eundem denominatorem, seu ad idem nomen reducere.*

Resolutio. Numerator cujuscumque fractionis ducatur in denominatorem reliquarum, & novi numeratores emergent; tum denominatores singuli inter se multiplicentur, & productum erit denominator communis numeratoribus jam repertis subscribendus. Sic si fractiones reducendæ sint $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$; reductæ erunt $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$, sive $\frac{ad,\ bc}{bd}$, factis multiplicationibus $a \times d$, $b \times c$, & $b \times d$. Ratio patet; nam si in $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$ literæ communes elidantur, redibit $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. Item si fractiones reducendæ sint $\frac{ab}{c}$, $\frac{cde}{fg}$, $\frac{lhh}{gm}$; reductæ erunt $\frac{abfggm,\ ccdegm,\ cfghhl}{cfggm} = \frac{abfgm,\ ccdem,\ cfhhl}{cfgm}$.

34.

34. Propositio II. *Fractiones addere, & subtrahere.*

Resolutio I. Si fractiones eodem denominatore gaudeant, fiat earum additio, vel subtractio, signis ad hoc idoneis de more interpositis. Sic si addendæ forent fractionès $\frac{ab}{ef}$, $\frac{cd}{ef}$ summa erit $\frac{ab}{ef} + \frac{cd}{ef}$, seu $\frac{ab+cd}{ef}$; si secunda fractio ex prima subtrahenda, residuum erit $\frac{ab-cd}{ef}$.

II. Si denominatoribus diversis afficiantur, reducantur prius ad eundem denominatorem (33.), deinde addantur, vel subtrahantur, prout requiritur, per signa convenientia. Sint ex. gr. fractiones $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$; reductæ fient $\frac{ad}{bd}$, $\frac{bc}{bd}$; earum summa $\frac{ad+bc}{bd}$; differentia $\frac{ad-bc}{bd}$, vel $\frac{bc-ad}{bd}$ secundum jussam subtractionem. Itidem proponantur addendæ, vel subtrahendæ fractiones $\frac{abc}{af+fg}$, $\frac{c^3-ab^2}{a^2-g^2}$; animadverto, denominatorem $af+fg = (a+g)f$, & denominatorem $a^2-g^2 = (a+g)(a-g)$; quare multiplico decussatim abc in $a-g$, & c^3-b^2 in f, & provenit numerator $a^2bc-abcg$, c^3f-ab^2f: deinde duco $a-g$ in f, & obtineo $(af-fg)$ $(a+g)$ pro denominatore; idcirco fractionum summa $= \frac{a^2bc-abcg+c^3f-ab^2f}{(af-fg)(a+g)}$ $= \frac{a^2bc-abcg+c^3f-ab^2f}{(aa-gg)f}$; differentia vero secun-

dæ

dæ a prima fractione erit $\frac{a^2bc-abcg-c^3f+ab^2f}{(aa-gg)f}$.

III. Quod si addenda sint integra cum fractis, vel ab ipsis subtrahenda, integra prius integris addi possunt, vel ab ipsis subtrahi, deinde additio aut subtractio fractionum cum fractionibus, prout docuimus, expediatur.

35. Propositio III. *Fractiones multiplicare.*

Resolutio. Multiplicentur invicem datarum fractionum numeratores, idemque agatur cum earundem denominatoribus; producta supra & infra lineolam de more collocata dabunt fractionem quæsitam.

Demonstratio. Sint $\frac{a}{b}$, & $\frac{c}{d}$ fractiones, quæ ceteras quascumque inter se multiplicandas repræsentent; quoniam in omni multiplicatione est ut unitas ad alterum factorum, ita factor alter ad factum (23. n. 3.), si hoc dicatur F, erit $1 : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} : F$, seu $\frac{d}{d} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} : F$ (23. n. 3.), seu $d : c = \frac{a}{b} : F$ (14.); sed $d : c = \frac{ad}{bd} : \frac{ac}{bd}$ [*l. cit.*], seu $d : c = \frac{a}{b} : \frac{ac}{bd}$, seu $\frac{d}{d} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} : \frac{ac}{bd}$, ergo factum $F = \frac{ac}{bd}$. *Quod erat* &c.

Aliter. Positis $\frac{a}{b} = m$, $\frac{c}{d} = n$, erit $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = mn$; sed $\frac{ba}{b} = bm$, seu $a = bm$, & $c = dn$ (14. 24.);

(14. 24.); ergo $\frac{ac}{bd} = \frac{bmdn}{bd} = mn = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$.

36. *Coroll.* 1. Si multiplicanda sit fractio per integrum, patet, numeratorem fractionis in integrum ducendum esse, integer enim per unitatem divisus in fractionem ex dictis degenerat (32. n. 4.). Sic $\frac{a}{b} \times c$ $= \frac{a}{b} \times \frac{c}{1} = \frac{ac}{b}$, vel c reducatur ad eundem denominatorem cum a, eritque $\frac{a}{b} \times c = \frac{a}{b} \times \frac{bc}{b}$ $= \frac{ac}{b}$, ut ante.

37. *Coroll.* 2. Si integer cum fracto in integrum cum fracto duci debeat, multiplicentur invicem omnes termini, nempe integrum cum integro, integrum cum fracto, & fractum cum fracto, vel terminis utriusque factoris ad eosdem respectivos denominatores reductis, fiat multiplicatio. Sic $\left(a - \frac{bb}{a}\right)$ $\left(c - \frac{dd}{f}\right) = ac - \frac{add}{f} - \frac{bbc}{a} + \frac{bbdd}{af}$; vel quoniam $a - \frac{bb}{a} = \frac{aa-bb}{a}$, & $c - \frac{dd}{f} = \frac{cf-dd}{f}$, erit $\frac{(aa-bb)}{a} \frac{(cf-dd)}{f} =$ $\frac{aacf-aadd-bbcf+bbdd}{af} = ac - \frac{add}{f} - \frac{bbc}{a} + \frac{bbdd}{af}$, ut supra.

38. *Coroll.* 3. Si fractio ducatur in suum denominatorem, factum erit ipsius numerator. Sic $\frac{ab}{c+x} \times (c+x) = ab$.

39. *Scholion* (1.°) Juvat interdum aliter scribere productum ex fracto in integrum; ita $\frac{abx}{c}$, factum nempe ex $\frac{ab}{c}$ in x, exprimi potest per $\frac{ab}{c}x$; $\frac{ay}{3}$ per $\frac{1}{3}ay$; $\frac{4bz}{5}$ per $\frac{4}{5}bz$, &c.

(2.°) Factum ex duobus polynomiis invicem ductis idem persistit, etiamsi factores, mutatis signis, invicem rursus multiplicentur. Sic $(ab+cd-ef)(gb-am) = abgb+cdgb-efgb-aabm-acdm+aefm$. Mutentur in factoribus signa; productum ex $(-ab-cd+ef)(-gb+am)$ idem cum antecedente reperietur. Ratio est, quod signorum consecutiones positivæ in negativas mutatæ, & vicissim, semper dant signum positivum; itidemque signorum permutationes semper præbent signum negativum (27.); adeoque eadem terminorum eorundem signa debent in facto conservari. Id autem statim apparet propter $ab = -a \times -b$, & $-a \times b = a \times -b$.

40. Propositio IV. *Fractiones dividere.*

Resolutio. Invertatur fractio, quæ divisorem exprimit; fractio inversa ducatur in fractionem, quæ dividendum repræsentat; quod prodit, est quotus quæsitus.

Demonstratio. Proponatur fractio quævis $\frac{a}{b}$ per quamcumque fractionem $\frac{c}{d}$ dividenda; erit $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \times bd}{b} : \frac{c \times bd}{d} = ad : bc$ (14. 24.); quare $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ (11.). *Quod erat* &c.

Ali-

Aliter. Sint $\frac{a}{b}=m$, $\frac{c}{d}=n$, erit $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$; ſed $\frac{a}{b}=\frac{bm}{b}$, ſeu $a=bm$, & $c=dn$ (33. 14.); ergo $\frac{ad}{bc}=\frac{bmd}{bdn}=\frac{m}{n}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}$.

41. *Corollarium* 1. Quum itaque fractionum diviſio ad multiplicationem reducatur; quæ ſuperius in fractorum multiplicatione animadvertimus, hic quoque poſt inverſionem fractionis diviſorem exhibentis locum habent, nimirum (1.°) ſi fractus per integrum ſit dividendus, integer ducatur in denominatorem fractionis, (2.°) ſi integer cum fracto per integrum cum fracto dividi jubeatur, dividendus reducatur prius ad eundem denominatorem, idemque fiat cum diviſore; tum inverſo diviſore, multiplicatio inſtituatur. Sic ſi dividere oporteat $\frac{ab}{c}$ per $a+b$, quotus erit $\frac{ab}{ac+bc}$. Itidem ſi dividere velimus $a+\frac{bb}{c}$ per $x-\frac{xy}{f}$, ſive $\frac{ac+bb}{c}$ per $\frac{fx-xy}{f}$, inverſa diviſoris fractione, ac peracta poſtmodum multiplicatione, prodibit quotus $\frac{acf+bbf}{cfx-cxy}$.

42. *Coroll.* 2. Si quotus multiplicetur per diviſorem, emerget dividendus; ſic ſi $\frac{ab}{ac+bc}$ multiplicetur per $a+b$, prodit $\frac{ab}{c}$.

43. *Coroll.* 3. Divisio fractionis complexæ eidem Regulæ subiicitur; sit ex. gr. dividendum polynomium (A) cum fractionibus adnexis per polynomium (D) fractiones pariter continens; quotus erit (Q).

Dividendus (A) $\frac{1}{2}\frac{axx}{b} - \frac{3}{8}\frac{bxx}{f} + \frac{3}{4}cx - \frac{2}{9}ax + \frac{1}{6}\frac{bbx}{f} - \frac{1}{3}bc$	
Divisor (D) $\frac{2}{3}\frac{ax}{b} - \frac{1}{2}\frac{bx}{f} + c$	Quotus (Q) $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}b$

Divido $\frac{1}{2}\frac{axx}{b}$ per $\frac{2}{3}\frac{ax}{b}$, & fit quotus $\frac{3}{4}x$, quo posito in (Q), per eundem multiplico divisorem (D), & provenit factum $\frac{1}{2}\frac{axx}{b} - \frac{3}{8}\frac{bxx}{f} + \frac{3}{4}cx$, quod ex dividendo ($A$) subtraho, & pro residuo habeo (E), hoc est $-\frac{2}{9}ax + \frac{1}{6}\frac{bbx}{f} - \frac{1}{3}bc$. Rursus divido $-\frac{2}{9}ax$ per $\frac{2}{3}\frac{ax}{b}$, & obtineo quotum $-\frac{6}{18}b = -\frac{1}{3}b$, quem colloco in ($Q$); tum ducto $-\frac{1}{3}b$ in divisorem (D), factum $-\frac{2}{9}ax + \frac{1}{6}\frac{bbx}{f} - \frac{1}{3}bc$ subtraho ex secundo dividendo (E), & nihil remanet; ergo quotus quæsitus est $\frac{3}{4}x - \frac{1}{3}b$.

44. *Scholion.* Quotus ex duorum polynomiorum divisione ortus idem persistit, etiam si omnia divisoris, ac dividendi signa mutentur. Sit ex. gr. polynomium $ab - cd + de$ per polynomium $ef - gb$ divi-

 deo-

dendum. Quoniam divisio perfici nequit, quotus ita scribendus est $\frac{ab-cd+de}{ef-gh}$ [24. n. III.]; mutatis vero signis, prodibit $\frac{-ab+cd-de}{-ef+gh}$; dico, utrosque istos quotientes esse invicem æquales; nam $ab-cd+de = -1[-ab+cd-de]$; & $ef-gh = -1[-ef+gh]$; ergo $\frac{ab-cd+de}{ef-gh} = \frac{-1(-ab+cd-de)}{-1(-ef+gh)} = \frac{cd-ab-de}{gh-ef}$. Sed brevius id dignosci poterat, ad memoriam revocando, esse $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$ [27. n. IV.].

45. Propositio V. *Fractionem fractionis invenire.* *Resolutio.* Tam numeratores, quam denominatores invicem multiplicentur, & prodibit fractio quæsita.

Dem. In analogia $\frac{a}{b} : \frac{ac}{bd} = 1 : \frac{c}{d}$ tam est $\frac{ac}{bd}$ portio fractionis $\frac{a}{b}$, quam est $\frac{c}{d}$ portio unitatis; quare positis $c = 1$, $d = 4$, tam erit $\frac{c}{d} = \frac{1}{4}$ quarta pars unitatis, quam erit $\frac{a}{b} \times \frac{1}{4}$ quarta pars fractionis $\frac{a}{b}$; quod si fuerit $c = 3$, $d = 5$, eadem ratione ostendetur, $\frac{a}{b} \times \frac{3}{5}$ exhibere tres quintas partes fractionis $\frac{a}{b}$, & ita semper; ergo generatim

ut

ut fractionis $\frac{a}{b}$ quæsita portio $\frac{c}{d}$ habeatur, fieri debet $\frac{ac}{bd}$; *Quod erat* &c.

46. Propositio VI. *Ad verum valorem fractionis, cujus exacta divisio haberi non potest, quamtumlibet accedere.*

Resolutio. Adhibeatur communis Regula divisionis, & operatio continuetur, seriem inde dimanantem concinnando, donec lex, qua seriei termini progrediuntur, innotescat.

Exemplum. Esto fractio $\frac{a}{b+c}$, cujus valor per terminos ad infinitum vergentes designandus. Dividatur a per b. Primus quoti terminus erit $\frac{a}{b}$, qui ductus in divisorem $b+c$ exhibet $\frac{ab}{b} + \frac{ac}{b}$, sive $a + \frac{ac}{b}$. Detracta hac quantitate ex dividendo a, remanet $-\frac{ac}{b}$. Hoc residuum per b itidem divisum dat secundum quoque terminum $-\frac{ac}{b^2}$, quo per eundem divisorem $b+c$ multiplicato, prodit $\frac{-abc-acc}{b^2} = -\frac{ac}{b} - \frac{ac^2}{b^2}$; ista vero quantitas ex primo residuo $-\frac{ac}{b}$ subducta dat secundum residuum $+\frac{ac^2}{b^2}$. Hoc

 rur-

rursus per b divisum præbet tertium quoti terminum $\frac{ac^2}{b^3}$, quo ducto in $b+c$ obtinetur $\frac{abc^2}{b^3}+\frac{ac^3}{b^3}=\frac{ac^2}{b^2}+\frac{ac^3}{b^3}$. Subtrahe hujusmodi productum ex secundo residuo $\frac{ac^2}{b^2}$, & habebis tertium residuum $-\frac{ac^3}{b^3}$. Si hoc præterea per b dividas, exurget quartus quoti terminus $-\frac{ac^3}{b^4}$, & ita porro. Quotus igitur quæsitus designabitur per seriem interminatam $\frac{a}{b}-\frac{ac}{b^2}+\frac{ac^2}{b^3}-\frac{ac^3}{b^4}$ + &c. Ulterius autem progredi est inutile, ex tribus enim, aut quatuor seriei alicujus terminis ejusdem conditio sæpius erui potest. Profecto in allata serie terminorum imparium signa sunt positiva, parium negativa; denominatores insuper fractionum sunt producta quantitatis b in se ipsam, cujus exponentes ordinem terminorum retinent, numeratores autem sunt factum quantitatis simplicis a in producta quantitatis c, cujus exponentes deficiunt unitate a numero ordinis terminorum.

47. *Coroll.* 1. Si ponatur $a=1, b=1$, fractio $\frac{a}{b+c}$, substitutis valoribus, evadet $\frac{1}{1+c}=1-c+c^2-c^3+c^4$, &c. in infinitum.

48. *Coroll.* 2. Si fiat $a=1, c=1, b=2$, prodibit $\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}$, &c. quam seriem, quum ejus termini semper decrescant, li-

liquet, eo magis ad datæ fractionis $\frac{1}{3}$ verum valorem accedere, quo longius continuatur; primus enim terminus $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$; duo primi termini $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$; tres primi termini $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$; quatuor primi termini $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \frac{1}{3} - \frac{1}{48}$, & sic deinceps; quamobrem hujusmodi series *convergentes* appellantur.

49. *Coroll.* 3. Si $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$, erit $\frac{1}{1+2} = \frac{1}{3} = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64$ &c. Ex quo colligitur, quod si contra secundus divisoris terminus primum excedit, termini seriei fiunt semper crescentes, ac proinde quo longius series protrahitur, eo magis a vero quoti valore recedit; quamobrem hujusmodi series dicuntur *divergentes*.

50. *Coroll.* 4. Si $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, fiet $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 +$ &c. quæ series neque est convergens, neque divergens, quare hujusmodi series vocantur *parallelæ*.

51. *Scholion.* Animadversione dignum censeo (1.°) quod si seriei $1 - c + c^2 - c^3 + c^4$ &c. portiones quælibet usque ad terminum positivum adsumantur, & ultimus hic terminus per fractionis $\frac{1}{1+c}$ denominatorem $1 + c$ dividatur, singulæ istæ portiones erunt

semper fractioni $\frac{1}{1+c}$, adeoque invicem æquales, nimirum $\frac{1}{1+c} = 1 - c + \frac{c^2}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^4}{1+c} =$ &c. Si enim ambæ istæ portiones ad eundem denominatorem reducantur, prodibit $\frac{1+c-c-c^2+c^2}{1+c} = \frac{1+c-c-c^2+c^2+c^3-c^3-c^4+c^4}{1+c} = \frac{1}{1+c}$. (2.°) Series parallela $1 - 1 + 1 - 1 +$ &c. $= 0 + 0 + 0 + 0 +$ &c. nihil exhibet. Celeberrimus D. Guido Grandus (*Quadrat. circ. & hyperb. Prop.* VII.) perperam arbitratus est, ex hac demonstrari posse ex nihilo creationem; valor siquidem fractionis $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ non est tantum quotus $0 + 0 + 0 + 0 +$ &c. sed residuum quoque $\pm \frac{1}{1+1} = \pm \frac{1}{2}$, ut calculum iteranti constabit, quod nihil novi suppeditat. Pro seriebus autem convergentibus, quæ fractioni $\frac{1}{2}$ æquivaleant, inveniendis, sufficit ita sumere denominatorem $b + c$; ut emergat $b + c = 2$, quod infinitis modis perfici potest. Sic si ponatur $b = 3$, $c = -1$, fiet $\frac{1}{3-1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} +$ &c. (3.°) Ceterum series istæ parallelæ signa alternantes non sunt prorsus inutiles censendæ, quamvis enim nec verum fractionis, unde ori-

originem trahunt, valorem præbeant, nec ad ipsum accedere possint, unius tamen termini dimidium earum verum exhibet valorem. Sic si fiat $c = b$, emerget series $\frac{a}{b} - \frac{a}{b} + \frac{a}{b} - \frac{a}{b} +$ &c. in qua $\frac{1}{2}\frac{a}{b}$ innuit, ipsam ex $\frac{a}{b+b}$ fuisse progenitam. (4.°) Quid quod si fiat ut differentia primi termini a secundo ad primum terminum, ita iste ad quartum, hic unde ortum series duxerit saltem indicabit. Sic ex analogia $1-(-2):1$, seu $3:1 = 1:\frac{1}{3}$ colligitur, seriem $1-2+4-8+16$, &c. oriri a fractione $\frac{1}{3}$. Id in omnibus seriebus, quæ geometricæ appellantur, est verum. Sed ratio non est hujus loci. (5.°) Quo major ponitur b comparate ad c, eo magis series evadit convergens, & contra. Itaque ut series habeatur convergens, major terminus in denominatore est primo loco collocandus.

CAPUT V.

De Algorithmo Potestatum per earum Exponentes.

52. *Definitio.* *Potestates*, *potentiæ*, *dignitates*, *gradus*, *dimensiones* generaliter appellantur producta quantitatis alicujus in se ipsam. Particulariter vero si eadem quantitas a in se ipsam semel ducatur, productum a^2 dicitur secunda potentia, seu quadratum; si bis, ut a^3, tertia potentia, seu cubus; si ter, ut a^4,

quarta potentia, seu quadrato—quadratum; si quater, ut a^5, quinta potentia, seu quadrato—cubus; si quinquies, ut a^6, sexta potentia, sive cubo—cubus, & ita porro, desumpta ex indice, vel exponente potentiæ denominatione, unde oritur series a^1, a^2, a^3, a^4, a^5, &c. ubi advertendum, in omni quantitate, quæ exponente careat, subintelligi semper debere exponentem 1, ita ut a, vel ab æquivaleat hisce a^1, a^1b^1.

53. Propositio I. *Potentiam per aliam ejusdem literæ, seu speciei multiplicare.*

Resolutio. Addantur exponentes, & prodibit factum quæsitum.

Dem. Ex dictis $a^2 = aa, a^3 = aaa$, & sic deinceps (23.n.7.), sed factum ex aa in aaa si per extensum scriberetur, foret $aaaaa$, sive a^5, sive a^{2+3}; ergo $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$; pari modo demonstrabitur $a^3 \times a^4 = a^{3+4} = a^7$; generatim $a^m \times a^n = a^{m+n}$, & $a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{n}{r}} = a^{\frac{r+mn}{mr}}$; *Quod erat* &c.

54. Propositio II. *Potentiam per aliam ejusdem literæ dividere.*

Resolutio I. Exponens potentiæ dividentis subducatur ab exponente potentiæ dividendæ, & exurget quotus quæsitus.

Dem. Divisa a^5 per a^3, si quotus per extensum scribatur provenit $\frac{aaaaa}{aaa} = aa = a^{5-3}$; ergo $\frac{a^5}{a^3}$, sive

a^5:

$a^5 : a^3 = a^{5-3} = a^2$; similiter ostendetur $a^3 : a^2 = a^{3-2} = a$; generatim vero $a^m : a^n = a^{m-n}$.

II. Quod si divisoris exponens major sit exponente dividendi velut $\frac{aaa}{aaa \times aa} = \frac{1}{aa}$, tunc fit $\frac{1}{aa} = a^{3-5} = a^{-2}$; adeoque si fuerit $n > m$, & $m - n = -r$, quotus erit $a^{m-n} = a^{-r} = \frac{1}{a^r}$. Hoc autem sic luculentius ostenditur. Quoniam (*per Dem.*) $a^{-r} \times a^{2r} = a^r$; dividendo hinc inde per a^{2r}, erit $\frac{a^r}{a^{2r}} = a^{-r}$; sed $\frac{a^r}{a^{2r}} = \frac{a^r}{a^r \times a^r} = \frac{1}{a^r}$; ergo $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$. *Quod erat* &c.

55. *Coroll.* 1. Hinc oritur potestatum exponentes negativos habentium series, videlicet a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, a^{-5}, &c. quæ equivalet huic $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, $\frac{1}{a^5}$, &c.

56. *Coroll.* 2. Ob $\frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = 1 = a^{1-1} = a^0$, erit $a^0 = 1$. Eadem ratione $\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0 = 1$. Similiter $\infty^0 = 1$.

57. *Coroll.* 3. Quum sit $\frac{1}{a^m}$ in ratione reciproca po-

potentiæ a^{m}, erit etiam a^{-m} in ratione reciproca ejusdem potentiæ a^{m}.

58. *Coroll.* 4. Quoniam numerus m esse potest integer vel fractus, ut jam monuimus (14) obvenire possunt potentiæ, quarum exponentes sint numeri fracti, quæque dicuntur imperfectæ, & quidem positivæ, ut $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{10}{13}}$, &c. vel negativæ, ut $a^{-\frac{1}{3}}$, $a^{-\frac{4}{5}}$, $a^{-\frac{11}{12}}$, &c. Istæ autem aliter etiam exprimuntur, ut suo loco patebit.

59. *Coroll.* 5. Si $a^{m} \times c^{-n} = \frac{a^{m}}{c^{n}}$; erit quoque vicissim $\frac{a^{m}}{c^{-n}} = a^{m} c^{n}$.

60. *Coroll.* 6. Quapropter quantitates fractæ instar integrarum computari possunt, & vicissim. Sic $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = ab^{-1} \pm cd^{-1}$; $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = ab^{-1} \times d^{-1}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ab^{-1} : cd^{-1}$; ex quo regulæ pro fractionum multiplicatione, ac divisione demonstratio facillime descendit. Etenim $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = acb^{-1}d^{-1} = \frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ab^{-1}}{cd^{-1}} = \frac{ad}{bc}$.

61.

61. Propositio III. *Potentiam quamcumque ad aliam ejusdem speciei dato exponente affectam evehere.*

Resolutio. Exponens datæ potentiæ ducatur in datum exponentem; factum erit exponens potestatis quæsitæ.

Dem. Potentiam aliquam in aliam dati exponentis evehere idem est ac toties ipsam per se multiplicare, quot unitates una dempta sunt in dato exponente; ergo resolutionis ratio patet. Ita elevare a^2 ad potestatem a^3 idem est atque ipsam elevare ad potestatem tertiam, quare fiet $a^2 \times a^2 \times a^2 = a^6 = a^{2 \cdot 3}$, & sic de reliquis casibus; quare generatim potestas x^m evecta ad potestatem n, evadet x^{mn}, potestas x^m elevata ad potestatem $-n$ fiet x^{-mn}, & $\frac{3}{4} a^m$ elevata ad potestatem n erit $\frac{3^n}{4^n} a^{mn}$, ubi tam m, quam n pro numeris integris vel fractis accipi possunt.

62. *Coroll.* Hinc innotescit, quomodo productum duarum vel plurium quantitatum ad dati exponentis potestatem attollitur; sic factum abx ad tertiam potestatem elatum fit $a^3 b^3 x^3$; generatim potestas p quantitatis $a^m b^n x^r$ est $a^{mp} b^{np} x^{rp}$, & potestas m quantitatis $\frac{4}{5} \frac{a^2 x^3}{y^4} = \frac{4^m}{5^m} \frac{a^{2m} x^{3m}}{y^{4m}}$. Potestas autem m quantitatis $abcx$ compendiose interdum exprimitur per $\overline{abcx}^m$, vel per $(abcx)^m$.

63.

63. Potestatum dissimilium algorithmus eodem plane modo absolvitur, ac fit in ceteris quantitatibus dissimilibus. Sic si dentur duæ potentiæ a^m, b^n, earum summa erit $a^m + b^n$, differentia $a^m - b^n$, productum $a^m b^n$, quotus $\frac{a^m}{b^n}$.

64. Propositio IV. *Binomium ad quamcumque dignitatem attollere.*

Resolutio. Quantitas binomia, quæ ut prima dignitas consideratur, ducatur in se ipsam, servatis regulis pro multiplicatione jam traditis (22. 23.), & habebitur quadratum, seu secunda dignitas; hæc iterum per primam dignitatem multiplicetur, & proveniet cubus, seu tertia dignitas, qua rursus in primam ducta, obtinebitur quarta dignitas, & ita porro. Ratio sequitur ex Prop. antecedente.

65. Propositio V. *Potestatum, seu dignitatum gradatim ascendentium, quas adnexa exhibet Tabella, symptomata perscrutari.*

Resolutio I. In singulis cujuscumque seriei terminis exponentium aggregatum ad eandem cum dignitate dimensionem assurgit.

II. Termini medii ab extremis, vel ab aliis intermediis æquidistantes, coëfficientibus non computatis, efficiunt cum ipsis proportionem geometricam; sic $a^3 : a^2b = ab^2 : b^3$; $a^6b : a^4b^3 = a^3b^4 : ab^6$, &c. Hinc ut trinomium sit quadratum, productum duorum terminorum extremorum esse debet æquale dimidio medii termini quadrato; & vicissim. Ut quadrinomium

mium fit cubus, necesse est, ut duorum terminorum extremorum productum sit æquale subtriplo producto terminorum mediorum invicem multiplicatorum; & vicissim, &c.

1.ª	$a+b$
2.ª	$a^2+2ab+b^2$
3.ª	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
4.ª	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
5.ª	$a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
6.ª	$a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$
7.ª	$a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5$ $+7ab^6+b^7$
8.ª	$a^8+8a^7b+28a^6b^2+56a^5b^3+70a^4b^4+56a^3b^5$ $+28a^2b^6+8ab^7+b^8$
9.ª	$a^9+9a^8b+36a^7b^2+84a^6b^3+126a^5b^4+126a^4b^5$ $+84a^3b^6+36a^2b^7+9ab^8+b^9$
10.ª	$a^{10}+10a^9b+45a^8b^2+120a^7b^3+210a^6b^4$ $+252a^5b^5+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8$ $+10ab^9+b^{10}$
	&c.

III. Terminorum numerus comparate ad binomium augetur, ut succrescit dignitatis exponens auctus unitate.

IV.

IV. Si binomium non aggregatum, ut in Tabella, sed exprimat residuum, nempe $a-b$, signa in potestatibus erunt per vices positiva, & negativa; negativa scilicet ubi negativus binomii terminus $-b$ ad potestatem imparem elevatur, nam $-b \times -b \times -b = -b^3$, quod in potestatibus omnibus imparibus semper fit verum. Sic tertia potentia hoc in casu erit $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

V. In quacumque potestate incipiendo ab ultimo termino, & inverse progrediendo, coëfficientes cum illis singillatim congruunt, qui ordine directo procedunt.

VI. Terminus primus dati binomii, quæcumque sit potestas, ad quam binomium evehitur, unam dimensionem in subsequenti progressu gradatim amittit, quamque primus terminus amittit, secundus acquirit.

VII. In quavis potestate coëfficiens secundi termini est potestatis exponens; tertii est idem exponens ductus in se ipsum unitate multatum, & per 2 divisum; quarti est coëfficiens tertii ductus in potestatis exponentem duobus unitatibus imminutum, & per 3 divisum; qua regula procedendo, reliqui terminorum coëfficientes, quos Ougtrhedus *uncias* vocat, in omnibus dati binomii dignitatibus reperiuntur. Sic coëfficiens secundi termini quartæ potestatis est $\frac{4}{1}$; tertii $\frac{4}{1} \times \frac{\overline{4-1}}{2} = 6$; quarti $\frac{4}{1} \times \frac{\overline{4-1}}{2} \times \frac{\overline{4-2}}{3} = 4$; quinti $\frac{4}{1} \times \frac{\overline{4-1}}{2} \times \frac{\overline{4-2}}{3} \times \frac{\overline{4-3}}{4} = 1$; & sic de ceteris.

66.

66. *Coroll.* 1. Hinc methodus facilis & expedita inveniendi terminos omnes literales cum suis coëfficientibus pro quavis binomii dignitate. Etenim (1.°) disponantur ex ordine in primo binomii termino a potestates, incipiendo a maxima, & gradatim per numeros naturales descendendo usque ad a^0. (2.°) Idem peragatur assumpto termino secundo b; sed ordine inverso; incipiendo nempe a b^0. (3.°) Secunda series infra primam collocetur, scribendo singulos secundæ seriei terminos sub singulis primæ, ut (4.°) termini respondentes invicem multiplicentur; ex. gr. pro septima potestate habetur

$$\begin{array}{l} a^7, a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a^1, a^0 \\ b^0, b^1, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, b^7 \\ \hline a^7, a^6b, a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7 \end{array}$$

; quod productum omnes terminos literales septimæ binomii $a+b$ dignitatis exhibet.

Coëfficiens autem secundi termini hujus septimæ dignitatis est 7; tertii est $7 \times \frac{7-1}{2} = 21$; quarti $21 \times \frac{7-2}{3} = 35$; quinti $35 \times \frac{7-3}{4} = 35$; sexti $35 \times \frac{7-4}{5} = 21$; septimi $21 \times \frac{7-5}{6} = 7$; octavi $7 \times \frac{7-6}{7} = 1$.

Unde septima binomii $a+b$ dignitas consurgit $a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7a^1b^6 + b^7$, prorsus ut in Tabella.

67.

67. *Coroll.* 2. Ex hisce sequitur methodus generalis elevandi binomium $p \pm q$ ad potestatem quamlibet indeterminatam m; coëfficiens enim secundi termini erit $\frac{m}{1}$, tertii $\frac{m.\overline{m-1}}{1.\ 2}$, quarti $\frac{m.\overline{m-1}.\ \overline{m-2}}{1.\ 2.\ 3}$, quinti $\frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$, & sic deinceps ininfinitū. Termini autem ipsius potestatis indeterminatæ erunt p^m, $p^{m-1}q$, $p^{m-2}q^2$, $p^{m-3}q^3$, $p^{m-4}q^4$, &c. proinde singulis hisce terminis suos coëfficientes præfigendo, exurget binomii potentia m. Sic $(p \pm q)^m =$

$$p^m$$
$$\pm \frac{m}{1}\, p^{m-1} q$$
$$+ \left(\frac{m.\overline{m-1}}{1.\ 2}\right) p^{m-2} q^2$$
$$\pm \left(\frac{m.\overline{m-1}.\ \overline{m-2}}{1.\ 2.\ 3}\right) p^{m-3} q^3$$
$$+ \left(\frac{m.\ \overline{m-1}.\ \overline{m-2}, \overline{m-2}}{1.\ 2.\ 3.\ 4}\right) p^{m-4} q^4$$
$$\pm \left(\frac{m.\ \overline{m-1}.\ \overline{m-2}.\ \overline{m-3}.\ \overline{m-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\right) p^{m-5} q^5, \text{ \&c. in infinitū.}$$

68. *Coroll.* 3. Quoniam vero positis $P = p$, $PQ = q$, substituendo habetur $mP^{m-1}PQ = mP^m Q$; $\frac{m.\overline{m-1}}{1.\ 2} P^{m-2} P^2 Q^2 = \frac{m.\overline{m-1}}{1.\ 2} P^m Q^2$, &c. erit $(p \pm q)$

$(p\pm q)^m = (P\pm PQ)^m =$

P^m

$\pm \frac{m}{1} P^m Q$

$+ \frac{m.\overline{m-1}}{1.\ 2} P^m Q^2$

$\pm \frac{m.\ \overline{m-1}.\ \overline{m-2}}{1.\ 2.\ 3} P^m Q^3$, &c. quapropter si ponatur $A = P^m$, terminus secundus evadet $\frac{m}{1} AQ$; fac modo $\frac{m}{1} AQ = B$, tertius terminus erit $\frac{\overline{m-1}}{2} BQ$, substituendo B pro $\frac{m}{1} P^m Q$; statue $\frac{m-1}{2} BQ = C$, quartus terminus fiet $\frac{\overline{m-2}}{3} CQ$, subrogando C pro $\frac{m.\ \overline{m-1}}{1.\ 2} P^m Q^2$, &c. ex quo elicitur $(p\pm q)^m = (P\pm PQ)^m = P^m \pm \frac{m}{1} AQ + \frac{(m-1)}{2} BQ \pm \frac{(m-2)}{3} CQ + \frac{(m-3)}{4} DQ \pm \frac{(m-4)}{5} EQ +$ &c. in infinitum pro formula generali Newtoniana binomii $p\pm q$ ad quamcumque potentiam indeterminatam elevandi; in cujus formulæ ad casus particulares applicatione a-

nimadvertendum, quod quum sit $PQ = pQ = q$; erit etiam $\frac{pQ}{p} = \frac{q}{p}$, hoc est $Q = \frac{q}{p}$.

Exemplum. Ut hic eximiæ hujus formulæ usus aliquis appareat, esto numerus 16 ad quartam potestatem elevandus. Dividatur in duas portiones, ex. gr. in 10, & 6, ac fiat $P = 10$; erit $Q = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$; quum autem sit $m = 4$, substitutis in formula generali valoribus, reperietur

$P^m = 10^4 = 10000 = A.$

$\frac{m}{1} AQ = \frac{4}{1} . 10000 . \frac{3}{5} = 24000 = B.$

$\frac{(m-1)}{2} BQ = \frac{3}{2} . 24000 . \frac{3}{5} = 21600 = C.$

$\frac{(m-2)}{3} CQ = \frac{2}{3} . 21600 . \frac{3}{5} = 8640 = D.$

$\frac{(m-3)}{4} DQ = \frac{1}{4} . 8640 . \frac{3}{5} = 1296 = E.$

$\frac{(m-4)}{5} = 0 . 1296 . \frac{3}{5} = 0.$

Hic igitur series terminat, quare $16^4 = (10+6)^4 = A + B + C + D + E = 10000 + 24000 + 21600 + 8640 + 1296 = 65536.$

Eadem dignitas provenit, si 16 in duas alias quascumque partes secetur; ubi patet, quod si m explicetur per numerum integrum, series vel formula generalis in aliquo loco terminare debet.

69. *Coroll.* 4. Quæ de binomio per inductionem demonstravi (demonstrationem directam suo loco alla-

laturus) valent etiam pro quavis aliqua quantitate pluribus quam duobus terminis constante, duo vel plures velut unicum considerando. Sic si quantitas $a + 3b + 2c$ extolli debeat ad quadratum, fiat $3b + 2c = d$, & trinomium $a + 3b + 2c$ reducetur ad binomium $a + d$, cujus quadratum $a^2 + 2ad + dd = a^2 + 2a(3b + 2c) + (3b + 2c)^2 = a^2 + 6ab + 4ac + 9b^2 + 12bc + 4c^2$, & sic de reliquis polynomiis ad quasvis potestates efferendis.

70. *Cor.* 5. Quin etiam si infinitinomium $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 +$ &c. sit ad potestatem indeterminatam m attollendum, retento primo termino a, pone reliquos $bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 +$ &c. $= x$, ac fiet

$$\begin{array}{lllllll}
x^2 = b^2x^2 + 2bcx^3 + & c^2x^4 + & 2cdx^5 + & d^2x^6 + & \text{\&c.} \\
 & + 2bdx^4 + & 2bex^5 + & 2cex^6 + & \text{\&c.} \\
 & & & + 2bfx^6 + & \text{\&c.} \\
x^3 = \quad + b^3x^3 + & 3b^2cx^4 + & 3bc^2x^5 + & c^3x^6 + & \text{\&c.} \\
 & & + 3bdx^5 + & 6bcdx^6 + & \text{\&c.} \\
 & & & + 2b^2ex^6 + & \text{\&c.} \\
x^4 = & + b^4x^4 + & 4b^3cx^5 + & 6b^2c^2x^6 + & \text{\&c.} \\
 & & & + 4b^3dx^6 + & \text{\&c.} \\
x^5 = & & + b^5x^5 + & 5b^4cx^6 + & \text{\&c.} \\
\text{\&c.} & & & \text{\&c.} &
\end{array}$$

quibus valoribus in formula $a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} x + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2} a^{m-2} x^2 + \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3} a^{m-3} x^3 +$ &c. suffectis, terminisque homogeneis, in quibus eadem ipsius x potestas occurrit, sub eadem columna notatis, pro infinitinomii potestate m prodibit formula a^m

$$a^m$$

$$+\frac{m}{1}a^{m-1}bx$$

$$\left.\begin{array}{l} +\dfrac{m.\overline{m-1}}{1.\ 2}a^{m-2}b^2 \\ +\dfrac{m}{1}a^{m-1}c \end{array}\right\} x^2$$

$$\left.\begin{array}{l} +\dfrac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.\ 2.\ 3}a^{m-3}b^3 \\ +\dfrac{m.\overline{m-1}}{1.\ 1}a^{m-2}bc \\ +\dfrac{m}{1}a^{m-1}d \end{array}\right\} x^3$$

$$\left.\begin{array}{l} +\dfrac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1.\ 2.\ 3.\ 4}a^{m-4}b \\ +\dfrac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.\ 2.\ 1}a^{m-3}b^2c \\ +\dfrac{m.\overline{m-1}}{1.\ 2}a^{m-2}c^2 \\ +\dfrac{m.\overline{m-1}}{1.\ 1}a^{m-2}bd \\ +\dfrac{m}{1}a^{m-1}e \end{array}\right\} x^4$$

+

$$\left.\begin{array}{l}
+\dfrac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}.\overline{m-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}\,a^{m-5}\,b^5 \\
+\dfrac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3}}{1.\ 2.\ 3.\ 1}\,a^{m-4}\,b^3c \\
+\dfrac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.\ 2.\ 1}\,a^{m-3}\,b^2d \\
+\dfrac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.\ 2.\ 1}\,a^{m-3}\,bc^2 \\
+\dfrac{m.\overline{m-1}}{1.\ 1}\,a^{m-2}\,cd \\
+\dfrac{m.\overline{m-1}}{1.\ 1}\,a^{m-2}\,be \\
+\dfrac{m}{1}\,a^{m-1}\,f
\end{array}\right\}x^5$$

&c.

71. *Scholion* I. Quoniam præſtat interdum polynomium ad datam poteſtatem elevare, ſcribendo tantum ad ejus dexteram exponentem poteſtatis quæſitæ poſtquam ipſum intra parentheſim incluſum ſit, vel linea ipſi ſuperducta, ut $(a+b-c)^m$, vel $\overline{a+b-c}^m$, ſequitur. (1.°) Quod ſi poteſtatem $(a+b-c)^m$ attollere lubeat ad aliam n, ſufficit exponentem unius ducere in alterius exponentem, ut $(a+b-c)^{mn}$. (2.°) Si duæ poteſtates ejuſdem quantitatis puta $(a+b-c)^m$, $(a+b-c)^n$ multiplicari debeant, ſufficit earum exponentes addere, ſic $(a+b-c)^m \times$

D 3 $(a+b$

$(a+b-c)^{n} = (a+b-c)^{m+n}$. (3.°) Contra si prima per secundam sit dividenda, divisoris exponens potest ab exponente dividendi subduci, ut fiat quotus $(a+b-c)^{m-n}$. (4.°) Polynomia dissimilia ad diversas dignitates elata summantur, subtrahuntur, multiplicantur, ac dividuntur, signis convenientibus tantum interpositis eo plane modo, quo de monomiis dissimilibus jam docuimus.

72. *Scholion* II. Occasionem arripio sequens aliquando perutile demonstrare.

Theorema. *In quacumque potentia, quæ ex binomii, vel polynomii differentia positiva consurgit, summa terminorum positivorum semper est major summa terminorum negativorum.*

Dem. Quoniam binomium aut polynomium quodlibet per differentiam quomodocumque expressum est positivum, quævis potestas inde emergens erit & ipsa necessario positiva; sed positiva esse nequit, nisi terminorum positivorum summa superet summam terminorum negativorum; ergo &c.

In cujusque igitur binomii positivi potestate summa terminorum imparium superat terminorum parium summam. Sic in binomii $x+y$ quadrato fit $x^2 + y^2 > 2xy$, & in cubo habetur $x^3 + 3xy^2 > 3x^2y + y^3$, &c.

CA-

CAPUT VI.

De radicibus, & earum extractione.

73. DEfinitio I. Quantitas, quæ per se ipsam multiplicata potentias gignit, dicitur earum *latus*, seu *Radix*. Sic a comparate ad quadratum a^2 dicitur radix quadrata, comparate ad cubum a^3 radix cubica, & ita porro.

74. Cum autem quantitatis alicujus radix exacta haberi nequit, quod ut plurimum accidit, radicis extractio per signum $\sqrt{}$ indicatur, cujus vertici immineat numerus radicem quæsitam exprimens. Sic $\sqrt[3]{}$ indicat radicem cubicam, $\sqrt[4]{}$ radicem quadrato-quadratam, &c. Si vero nullus supra signum radicale adsit numerus, subintelligatur 2, qui numerus radicem quadratam significat. Generatim si pro numero sit species quævis superposita, ut $\sqrt[m]{}$, vel $\sqrt[n]{}$, radix extrahenda indeterminate adsumitur.

75. *Def.* II. Quantitates radicales vocantur etiam *surdæ*, seu *irrationales*.

76. *Def.* III. Quantitates, quæ signo radicali præfiguntur, dicuntur ejus *coëfficientes*, vel *extra signum*; numerus superscriptus, ejus *exponens*, vel *index*; quantitas sub signo, *potentia*. Sic radicalis $3a\sqrt[3]{a^2-x^2}$, est $3a$ coëfficiens, 3 exponens, a^2-x^2 potentia.

77. Propofitio I. *Radicem ex potentiis fimplicibus extrahere.*

Refolutio. Dividatur exponens potentiæ per exponentem radicis quæfitæ, quotus erit radix.

Dem. Quemadmodum enim potentia aliqua ad aliam attollitur, utriufque exponentes multiplicando (61.), ita (quia divifio deftruit quidquid multiplicatio componit) ut radix extrahatur, operatio contraria debet inftitui, dividendo fcilicet exponentem potentiæ per exponentem radicis quæfitæ; *quod erat* &c.

Quæratur ex. gr. radix fecunda potentiæ a^3; dividatur 3 per 2, quotufque $\frac{3}{2}$ habeatur pro exponente; radix quæfita erit $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$. Pari modo radix fecunda potentiæ a^2 erit $a^{\frac{2}{2}} = \sqrt{a^2} = a$; tertia potentiæ a^3 evadet $\sqrt[3]{a^3} = a$; quinta potentiæ a^4 erit $a^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{a^4}$. Generatim radix n potentiæ a^m, five $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; $\sqrt[-n]{a^m} = a^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$; pariterque $\sqrt[n]{a^{-m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$.

78. *Coroll.* 1. Si extrahenda foret radix quadrata ex facto plurium quantitatum ab^2c^3, dividantur omnes earum exponentes 1, 2, 3 per 2, & radix erit $a^{\frac{1}{2}}bc^{\frac{3}{2}}$

ge-

generatim vero radix r producti $a^m x^n$ erit $a^{\frac{m}{r}} x^{\frac{n}{r}} = \sqrt[r]{a^m x^n}$; quare

79. *Coroll.* 2. Quantitates irrationales ad expreſſionem rationalem magno calculi commodo reduci poſſunt. Sic $\sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[4]{ab} = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[r]{a^m b^n} = a^{\frac{m}{r}} b^{\frac{n}{r}}$.

80. *Coroll.* 3. Poteſtates imperfectæ, de quibus per tranſ[illegible]nam verba fecimus (61.) ad ſigna radicalia revocantur.

81. *Coroll.* 4. Quantitas rationalis reduci poteſt ſub forma radicalis dati. Sic $a = \sqrt[2]{a^2} = \sqrt[3]{a^3} = \sqrt[4]{a^4} = \sqrt[m]{a^m}$; itidem $ax = \sqrt[2]{a^2x^2}, = \sqrt[3]{a^3x^3} = \sqrt[m]{a^m x^m}$.

82. *Coroll.* 5. Radices quantitatis negativæ, quarum exponens eſt numerus par, ut $\sqrt{-a}, \sqrt[4]{-a}$, & generatim (poſito m numero integro) $\sqrt[2m]{-a^n}$, ſunt *imaginariæ*, ſeu *impoſſibiles* ab aliis, quæ *reales* vocantur, diſtinguendæ. Etenim $-aa$ neque oriri poteſt ex $a \times a$, neque ex $-a \times -a$, ſed ex $a \times -a$, quod productum non eſt quadratum, ut ex quadrati definitione (52.) patet. Eadem ratio valet quoad ceteras potentias radicales (76.) negativo ſigno

figno fub vinculo affectas, cum radicis exponens eft numerus par, quotcumque fint quantitates reales cum imaginariis commixtæ, ut $n + m + n\sqrt{-1}$.

83. *Coroll.* 6. Monomium pofitivum, cujus exponens eft numerus par, duplicem radicem realem femper habet, alteram pofitivam, negativam alteram. Sic a^2 duas habet radices, a, & $-a$; oritur enim, tam ex $a \times a$, quam ex $-a \times -a$.

84. *Coroll.* 7. Si monomii exponens eft impar, tunc ejus radix realis eft pofitiva, cum potentia eft pofitiva, & contra negativa cum potentia eft negativa; ubi animadverte, effe $\sqrt[3]{-a} = -a^{\frac{1}{3}} = -\sqrt[3]{a}$, & $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$, fi fuerit n numerus impar.

85. Propofitio II. *Ex quantitatibus compofitis radicem extrahere.*

Refolutio I. Ordinentur termini fecundum potentiam alicujus litteræ.

II. Ex primo poteftatem perfectam referente extrahatur radix, quæ erit primus terminus radicis quæfitæ.

III. Radix ifta rurfus elevetur ad eandem poteftatem, una dempta unitate; ac deinde per dictæ poteftatis exponentem multiplicetur.

IV. Per hoc productum dividatur fecundus propofitæ quantitatis terminus, & quotus erit radicis terminus fecundus.

V. Illi duo termini inventi evehantur ad quantitatis propofitæ poteftatem, & ab ipfa quantitate fubdu-

ducantur; quod si nihil remaneat, operatio erit terminata; sin minus

VI. Duobus radicis inventis terminis velut uno consideratis, super illis ad tertium terminum inveniendum eadem iteretur operatio, quæ ad secundum venandum instituta fuit, & sic deinceps, donec vel ad zero deveniatur, vel series ad infinitum vergens occurrat. Ratio ex potestatum genesi profluit.

Exemplum I. Sit eruenda radix quadrata ex $9aa - 12ax + 4xx + 6ay - 4xy + yy$. Radix primi termini $9aa$ est $3a$, quam seorsum scribo pro primo radicis termino. Hunc attollo ad potestatem $2 - 1$, & idem remanet; quare per ipsum duplicatum divido secundum terminum $-12ax$, & obtineo pro quoto $-2x$, qui est secundus radicis terminus; tum $3a - 2x$ ad datæ quantitatis potestatem, nempe ad quadratum, eveho, proditque $9aa - 12ax + 4xx$, quo e quantitate proposita detracto, superest adhuc $6ay - 4xy + yy$, sive $(6a - 4x)y + yy$; elevata igitur radicis portione jam inventa $3a - 2x$ ad potestatem $2 - 1$, per ipsam $3a - 2x$ (quia eadem remanet) ductam in exponentem 2, nimirum per $6a - 4x$, divido $(6a - 4x)y$, & quotus y erit tertius terminus radicis expetitæ, quæ idcirco erit $3a - 2x + y$, quæque ad quadratum elevata quantitatem propositam adæquat, ut fieri oportebat.

Exemplum II. Extrahenda sit radix quartana ex $a^4 - 4a^3z + 6a^2z^2 - 4az^3 + z^4$. Extraho primum ex a^4 radicem quartanam, & habeo a pro primo radicis termino. Hunc attollo ad tertiam potestatem, quam multiplico per 4, & provenit $4a^3$. Per $4a^3$ divido se-

ſecundum terminum $-4a^3z$, & quotus $-z$ erit ſecundus radicis terminus; elevo $a-z$ ad poteſtatem quartam, qua ex quantitate propoſita ſubtracta, quum nihil reſtet, concludo, eſſe $a-z$ radicem quæſitam.

Exemplum III. Elicienda eſto radix quadrata ex binomio a^2+bx. Res (iiſdem principiis inſiſtendo) ſic fiet expeditior.

$$a^2+bx \quad \Big| \quad a+\frac{bx}{2a}-\frac{b^2x^2}{8a^3}+\frac{b^3x^3}{16a^5}-\frac{5b^4x^4}{128a^7}, \text{ \&c.}$$

Radice a primi termini a^2 poſita juxta binomium datum, ejus quadratum a^2 ſubtrahe a binomio propoſito, & reſiduo bx per $2a$ diviſo, pone quotum $+\frac{bx}{2a}$, ut in paradigmate, qui erit ſecundus quæſitæ radicis terminus.

Ducatur primus radicis terminus duplicatus, nempe $2a$, in $\frac{bx}{2a}$, deinde $\frac{bx}{2a}$ in ſe ipſum, & productum $bx+\frac{b^2x^2}{4a^2}$ detrahatur ex reſiduo bx; ex quo habetur $-\frac{b^2x^2}{4a^2}$.

Dividatur hoc ſecundum reſiduum per $2a$, & quotus $-\frac{b^2x^2}{8a^3}$ ſcribatur pro tertio radicis termino.

Hic

Hic ducatur in primum & secundum radicis terminum duplicatum, ac postmodum in se ipsum, & producto $-\frac{b^2x^2}{4a^2}-\frac{b^3x^3}{8a^4}+\frac{b^4x^4}{64a^6}$ dempto ex secundo residuo $-\frac{b^2x^2}{4a^2}$, fit tertium residuum $+\frac{b^3x^3}{8a^4}-\frac{b^4x^4}{64a^6}$, cujus primo termino per $2a$ diviso, quotus $\frac{b^3x^3}{16a^5}$. notetur pro quarto radicis termino.

Similiter ductis tribus primis radicis terminis duplicatis in quartum, nec non quarto in se ipsum, subducatur factum *a* tertio residuo, & novum residuum dividatur per primum radicis terminum duplicatum; quotus $-\frac{5b^4x^4}{128a^7}$ erit quintus radicis terminus; & sic deinceps in infinitum. Quæ methodus ad radices etiam e potestatibus altioribus extrahendas (earum genesi rite perpensa) extendi potest.

Alia Resolutio. Quantitas proposita, ex qua radix est elicienda, concipiatur velut quantitas ad eam potentiam elevanda, quam imperatæ radicis exponens indicat, nempe si radix sit quadrata, ejus exponens erit $\frac{1}{2}$, si cubica, $\frac{1}{3}$, &c.; tum per aliquam ex formulis generalibus in præcedenti capite traditis instituatur operatio, & potentiæ elevatio in radicis extractionem, ut liquet, convertetur. Sed animus ad sequentia intendendus.

I.

I. Cum radices extrahendæ sunt rationales, utendum est formula $p^m + \frac{m}{1} p^{m-1} q + \frac{m.\overline{m-1}}{1.\ 2} p^{m-2} q^2 +$ &c. (67.) cujus proinde duo primi termini sufficiunt, ut Exempla patefacient; tunc autem cum exponens m in valorum substitutione fit $= 0$, non est ulterius progrediendum; sin autem nullibi occurrat $m = 0$, quantitatis propositæ radix erit irrationalis, adeoque ejus extractio in infinitum abibit.

II. Verum pro radicibus irrationalibus extrahendis expedit (ad operationis molestiam imminuendam) uti formula Newtoniana (68.), cui loco exponentis integri m fractum $\frac{m}{n}$, ut suadet Auctor, substituatur; sic scribendum erit $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$ loco $(P+PQ)^m$; $P^{\frac{m}{n}}$ loco P^m; $\frac{m}{n} AQ$ loco $\frac{m}{1} AQ$; $\frac{(m-n)}{2n} BQ$ loco $\frac{(m-1)}{2} BQ$; $\frac{(m-2n)}{3n} CQ$ loco $\frac{(m-2)}{3} CQ$, & ita porro; est enim $\frac{\frac{m}{n}-1}{2} = \frac{m-n}{2n}$; $\frac{\frac{m}{n}-2}{3} = \frac{m-2n}{3n}$ (41. n. 2.), &c. Reductis itaque modo consimili reliquis terminis, exurget formula $(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}}$
+

$+\frac{m}{n}AQ+\frac{(m-n)}{2n}BQ+\frac{(m-2n)}{3n}CQ+\frac{(m-3n)}{4n}$

$DQ+\frac{(m-4n)}{5n}EQ+$ &c. Termini autem radicis sic inventi notari ex ordine possunt literis $A, B, C, D,$ &c. quarum A indicet primum terminum $=P^{\frac{m}{n}}$; B secundum $=\frac{m}{n}AQ$; C tertium $=\frac{(m-n)}{2n}BQ$; & sic deinceps, ut nuper egimus (68.).

III. Eo modo, quo potestatum imperfectarum radices nonnisi per series in infinitum vergentes exprimi possunt, quod radicum *approximatio* nuncupatur; fractionum quoque verarum quotus per series infinitas exhibebitur.

IV. Si numerus, ex quo radix eruenda, non est potentia perfecta, secetur in binomium exprimens summam, vel differentiam; ita sectus binomii $(P+PQ)^{\frac{m}{n}}$ formulis accommodatur. Quoniam vero hujus modi divisio modis innumeris (saltem per differentiam) salvo eodem valore, perfici potest, innumeræ quoque prodire possunt ejusdem radicis expressiones.

V. Si ex infinitinomio data radix extrahi jubeatur, formula pro infinitinomio ad datam potestatem attollendo jam allata (70.) quæsito satisfaciet.

Res fiet Exemplis illustrior.

Exemplum I. *Quæratur radix quadrata quantitatis* $4a^2 + 12ab - 4a + 9b^2 - 6b + 1$, seu erigenda sit quantitas $4a^2 + 12ab - 4a + 9b^2 - 6b + 1$ ad potestatem $\frac{1}{2}$. Ex formula generali $p^m + mp^{m-1}q$ ponatur $p = 4a^2$, $q = 12ab - 4a + 9b^2 - 6b + 1$, eritque ob $m = \frac{1}{2}$, $p^m = 4^{\frac{1}{2}} . a^{2.\frac{1}{2}} = 2a$; est igitur $2a$ primus radicis terminus. Deinde quia $m - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$, erit $p^{m-1} = 4.^{-\frac{1}{2}} a^{2.-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a^{-1}$;

quare $mp^{m-1}q = \frac{1}{4}a^{-1} . 12ab = 3a^{1-1}b = 3a^0b = 3b$; ergo $3b$ est secundus radicis terminus. Præterea quia multiplicari debet mp^{m-1} per $-4a$, erit $\frac{1}{4}a^{-1} . -4a = -a^{1-1} = -a^0 = -1$, proinde -1 est tertius radicis terminus; sed propter $m = 0$ ulterior perquisitio prætermittitur, quum enim habeatur a^0b, & $-a^0$, habentur etiam duo ultimi termini; ergo radix quæsita erit $2a + 3b - 1$. Ratio est, quod quantitas $\frac{9b^2}{4a} - \frac{3b}{2a} + \frac{1}{4a}$, quæ si calculus absolvatur, occurrit, est semper fractio ad quantitatem integram irreducibilis, sed quum hic de potestatibus inte-

gris

gris sermo sit, earum radix non fracta, sed integra esse debet, adeoque fractiones utpote inutiles sunt reiiciendæ, quod ad alios casus consimiles extenditur.

Exempl. II. *Eruenda sit radix quadrata ex* $\sqrt{aa \pm bx}$, *seu ex* $(aa \pm bx)^{\frac{1}{2}}$. Sumpta formula Newtoniana superiori (n. II.), quoniam $P = aa$, $Q = \pm \frac{bx}{aa}$ (68.). $m = 1$, $n = 2$; erit $P^{\frac{m}{n}} = a^{2 \cdot \frac{1}{2}} = a = A$.

$$\frac{m}{n} AQ = \frac{1}{2} a \times \pm \frac{bx}{aa} = \pm \frac{bx}{2a} = B.$$

$$\frac{(m-n)}{2n} BQ = -\frac{1}{4} \times \pm \frac{bx}{2a} \times \pm \frac{b}{aa} = -\frac{b^2x^2}{8a^3} = C.$$

$$\frac{(m-2n)}{3n} CQ = -\frac{1}{2} \times -\frac{b^2x^2}{8a^3} \times \pm \frac{bx}{aa} = \pm \frac{b^3x^3}{16a^5} = D.$$

$$\frac{(m-3n)}{4n} DQ = -\frac{5}{8} \times \pm \frac{b^3x^3}{16a^5} \times \pm \frac{bx}{aa} = -\frac{5b^4x^4}{128a^7} = E, \text{\&c.}$$

Quare quæsita radix erit $= A + B + C + D + E$
E =

$= a \pm \frac{bx}{2a} - \frac{b^2x^2}{8a^3} \pm \frac{b^3x^3}{16a^5} - \frac{5b^4x^4}{128a^7}$, &c. prorſus ut ſupra.

86. *Coroll.* 1. Si ponatur $b = x$, quantitas propoſita evaderet $\sqrt{aa \pm xx}$, ſive $(aa \pm xx)^{\frac{1}{2}}$, cujus idcirco radix, valoribus ſubſtitutis, fiet $= a \pm \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}$, &c.

87. *Coroll.* 2. Hinc ex quocumque numero integro non quadrato radix extrahi facillime poteſt. Quæratur ex. gr. $\sqrt{2}$. Findatur 2 in binomium $1+1$, quod duobus conſtat quadratis, adeoque $\sqrt{1+1}$ referri poteſt ad quantitatem Corollarii præcedentis, hoc eſt ad $\sqrt{aa+xx}$, ſtatuendo $a=1$, $x=1$, quibus valoribus in ejuſdem ſerie radicali ſubſtitutis, habetur $\sqrt{2} = \sqrt{1+1} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{5}{128}$, &c.

Si diſpeſcere lubeat $\sqrt{2}$ in radicem binomialem $\sqrt{4-2}$; hæc refertur ad ſuperiorem $\sqrt{aa-bx}$, ponendo $a^2=4$, $b=1$, $x=2$; quare invenietur $\sqrt{2} = \sqrt{4-2} = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \frac{5}{1024} =$

1+

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{16} - \frac{1}{64} - \frac{5}{1024}, \text{ \&c.}$$

Quum autem sit quoque $\sqrt{2} = \sqrt{9-7}$; fiat $a^2 = 9$, sive $a = 3$, $b = 1$, $x = 7$; subrogatisque terminis,

prodibit $\sqrt{2} = \sqrt{9-7} = 3 - \frac{7}{6} - \frac{49}{216} - \frac{343}{3888}$, &c.

$= 1 + \frac{5}{6} - \frac{49}{216} - \frac{343}{3888}$, &c.

Ex quibus apparet, novas jugiter inveniri posse series infinitas eidem quæsito satisfacientes; quin etiam quo major est primus numerus quadratus differentiæ $= 2$, seriem eo citius fieri convergentem (51. n. 5.).

88. *Coroll.* 3. Pro radice cubica ex numero quovis integro extrahenda adsumi potest series infinita æqualis quantitati $\sqrt[3]{a^3 \pm bcx}$; pro quadrato-quadrata, series quantitatis $\sqrt[4]{a^4 \pm vcjx}$, &c.

89. *Coroll.* 4. Quæ de fractionibus binomium pro denominatore habentibus demonstravimus, extendi quoque possunt ad fractiones, quarum denominator sit trinomium, quadrinomium, &c. quæcumque siquidem quantitas in binomium redigi potest, si altera ejus pars pro primo binomii termino, altera pro secundo accipiatur.

Exemplum III. *Exprimere per seriem quantitatem* $\frac{N}{\sqrt[3]{z^3-aaz}}$; sive $N(z^3-aaz)^{-\frac{1}{3}}$. Positis $P=z^3$, $Q=-\frac{aa}{zz}$, $m=-1$, $n=3$; erit $P^{\frac{m}{n}}=z^{3\times-\frac{1}{3}}=$

$z^{-1}=\frac{1}{z}=A$.

$\frac{m}{n}\times AQ=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{z}\times-\frac{aa}{z^2}=\frac{a^2}{3z^3}=B$.

$\frac{(m-n)}{2n}BQ=-\frac{2}{3}\times\frac{a^2}{3z^3}\times-\frac{a^2}{z^2}=\frac{2a^4}{9z^5}=C$.

$\frac{(m-2n)}{3n}CQ=-\frac{7}{9}\times\frac{2a^4}{9z^5}\times-\frac{a^2}{z^2}=\frac{14a^6}{81z^7}=D$. &c.

Ergo radix expetita $N(A+B+C+D$, &c.$)=N\left(\frac{1}{z}+\frac{a^2}{3z^3}+\frac{2a^4}{9z^5}+\frac{14a^6}{81z^7}+\text{&c.}\right)$.

Exemplum IV. *Quotum* $\frac{a}{b\pm c}$ *per seriem infinitam appropinquantem exhibere.* Quoniam $\frac{a}{b\pm c}=a(b\pm c)^{-1}$, statue $P=b$, $Q=\pm\frac{c}{b}$, $m=-1$, $n=1$; erit

rit $P^{\frac{m}{n}} = b^{-1} = \frac{1}{b} = A.$

$\frac{m}{n} AQ = -1 \times \frac{1}{b} \times \pm \frac{c}{b} = \mp \frac{c}{b^2} = B.$

$\frac{(m-n)}{2n} BQ = -1 \times \mp \frac{c}{b^2} \times \pm \frac{c}{b} = + \frac{c^2}{b^3} = C.$

$\frac{(m-2n)}{3n} CQ = -1 \times \frac{c^2}{b^3} \times \pm \frac{c}{b} = \mp \frac{c^3}{b^4} =$
$D.$ &c.

Ergo $\frac{a}{b \pm c} = a\,(b \pm c)^{-1} = \frac{a}{b} \mp \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} \mp \frac{ac^3}{b^4}$, &c.

90. *Corollarium* 1. Quoniam hæc ſeries cum illa congruit, quam jam invenimus (46.) ad fractionis $\frac{a}{b+c}$ valorem per approximationem exprimendum, liquet, allatam methodum Newtonianam diviſionibus etiam præſtandis inſervire, adeoque ex duplici fonte (diviſione ſcilicet, & radicis extractione) derivari quotum ex diviſione quantitatis cujuſvis per binomium, ut ut hæc quantitas diviſionem exactam non admittar.

91. *Coroll.* 2. Si $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, erit $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 +$ &c.

Si $a=1$, $b=2$, $c=1$, erit $\frac{1}{2-1}=1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+$ &c.

Si $a=1$, $b=1$, $c=2$, erit $\frac{1}{1-2}=\frac{1}{-1}=-1=1+2+4+8+$ &c.

Si $a=1$, $b=1$, $c=3$, erit $\frac{1}{1-3}=-\frac{1}{2}=1+3+9+27+$ &c.

Si $a=1$, $b=1$, $c=4$, erit $\frac{1}{1-4}=-\frac{1}{3}=1+4+16+64+$ &c.

92. *Scholion.* Interea sequentia sunt animadvertenda.

(1.°) Ex hujus secundi Corollarii seriebus infertur, esse $\frac{1}{-n}>\frac{1}{0}=\infty$, intelligendo per n numerum quemvis unitate majorem, quod alibi clarius demonstrabitur.

(2.°) Esse non potest $1=-1$, seu $n=-n$, aut $\frac{1}{n}=\frac{1}{-n}$, quod jam demonstrata (18. *num.* 3. & 4.) confirmat.

(3.°) Vidimus, esse $\frac{1}{0}=1+1+1+1+$ &c.

er-

ergo $\frac{1}{0} \pm 1 = 1 + 1 + 1 + 1 +$ &c. in infinitum; nimirum si aliquid infinito addatur, vel ab eo dematur, tam aggregatum, quam residuum remanet infinitum.

(4.°) Series, quæ vocantur infinitæ, nil aliud exprimunt, nisi quantitatis alicujus evolutionem, idque per terminos, quorum numerus per imbecillum nostrum supputandi modum nequit exhauriri. Et vicissim seriei infinitæ summa nil aliud est, nisi quantitas finita, ex cujus evolutione oritur illa series.

(5.°) Quo plures termini in seriebus divergentibus, (præsertim si omnes terminos habeant positivos) accipiuntur, eo magis series a vero valore, unde ortum duxere recedunt. Sed quamvis præstet series, quæ magis convergunt, eligere, attamen divergentes non sunt, ut nonnulli autumant, omnino spernendæ, utiles enim interdum esse possunt.

(6.°) Series convergentes incognitam vel indeterminatam aliquam comprehendentes in duo genera sunt distinguendæ. Aliæ pro dictæ incognitæ parvitate magis convergunt, & *crescentes*, vel *ascendentes* appellantur, quod incognitæ ipsius exponentes successive succrescunt, velut $\frac{a}{b} \mp \frac{ax}{b^2} + \frac{ax^2}{b^3} \mp \frac{ax^3}{b^4} +$ &c. Aliæ pro incognitæ magnitudine magis convergunt, & *decrescentes*, vel *descendentes* nuncupantur. In his incognitæ ipsius exponentes successive decrescunt, ve-

lut $\frac{a}{x} \mp \frac{ab}{x^2} + \frac{ab^2}{x^3} \mp \frac{ab^3}{x^4} +$ &c. Duplex iſtud ſerierum genus ob earum uſus diverſos, & interdum oppoſitos, non eſt confundendum.

(7.°) Quantitates poſitivæ dum in negativas migrant, & viciſſim, tranſeunt vel per o, vel per ∞. Primum jam vidimus (18. *num.* 1.), ſecundum patet ex ſerie.... $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{0}, \frac{1}{-1}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{-3}, \frac{1}{-4}$, &c.

Id confirmatur ex formula $\frac{bb}{a-c}$, in qua tres caſus dari poſſunt; vel enim $a>c$, vel $a=c$, vel $a<c$; in primo quotus eſt quantitas poſitiva, in ſecundo infinita, in tertio negativa.

(8.°) Non datur infinite parvum in ſenſu abſoluto, nam quicumque terminus conſideretur in ſerie aliqua infinita decreſcente, alium præcedit minorem, idque in infinitum.

(9.°) Incidere Tiro aliquando poteſt in paradoxum, quod demonſtrationem ſupra allatam everteret, nimirum $+\infty = -\infty$, & $+0 = -0$. Etenim

$$-\infty = -\frac{1}{0} = \frac{-1}{1-1} = \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0} = +\infty.$$

Similiter quoniam $0 = 1 - 1$, erit $-0 = -1 + 1 = +0$. Sed ne hac falſa veri ſpecie decipiatur, perpendat, æquivocationem iſtam ideo evenire, quod quomodocumque ſigna in denominatore $1 - 1$ mutenten-

tentur, hic ſemper perſiſtit $=0$. Ratio igitur jubet, alia via eſſe incedendum, ut conſtet de veritate.

Scimus autem, eſſe non poſſe $a^{\infty} = a^{-\infty}$, ſive $a^{\infty} = \frac{1}{a^{\infty}}$, niſi fuerit $a = 1$; præterea ſi eſſe nequit $\frac{1}{1} = \frac{1}{-1}$, ſive $1 = -1$, nec non $\frac{1}{a} = -\frac{1}{a}$, pariterque $a = -a$, ſimili modo, rem per caſus omnes urgendo, nec eſſe poteſt $\infty = -\infty$, nec $0 = -0$. Sed ſine tot ambagibus, patet ex calculo ſuperiori, eſſe non poſſe $\frac{1}{0} = \frac{-1}{0}$, ſive $1 \times \frac{1}{0} = -1 \times \frac{1}{0}$, tunc enim foret $1 + 1 + 1 + 1 +$ &c. $= -1 - 1 - 1 - 1 -$ &c. ſive $1 = -1$; quod eſt abſurdum. Hic interea mihi fas ſit nonnulla inſerere, quæ quamvis ad radicum extractionem non pertineant, attamen aliquam cum rebus nuper expoſitis connexionem, ac relationem habent. Sit igitur

93. Propoſitio III. *Signum ∞ non eſt accipiendum pro infinito abſoluto, ſed relativo, videlicet pro quantitate immane magna; ſignum autem 0 non eſt pariter habendum pro nihilo abſoluto, ſed relativo, nimirum pro quantitate immane parva.*

Dem. Conſentiunt omnes Analyſtæ, fractionem $\frac{1}{\infty}$ ob denominatorem infinitum eſſe $=0$. Habetur

tur igitur analogia $\infty : 1 = 1 : 0$, adeoque $\infty \times 0 = 1$. Sed zero infinities sumptus est semper zero, secus in damnatam P. D. Guid. Grandi sententiam (51. n. 11) relaberemur; ergo pro zero quantitas aliqua, quamvis immane parva, est necessario admittenda. Sed quantitas infinite parva in sensu absoluto dari nequit (92. n. 8.); ergo quantitas quomodocumque libeat immane parva, erit semper quantitas realis. At quantitas realis quamvis immane parva infinities sumpta fit quantitate quavis finita major; ergo ut esse possit $\infty \times 0 = 1$, necesse est, ut zero sit quantitas immane parva, sed realis, & ∞ quantitas immane magna, sed nunquam infinitum absolutum. *Quod erat* &c.

94. *Coroll.* 1. Quoniam in analogia $\infty : 1 = 1 : 0$, vel in alia consimili $\infty : a = a : 0$, media proportionalis potest in infinitum augeri aut imminui, reliquum est, ut tam ∞, quam 0 sint velut quantitates indeterminatæ, seu relativæ considerandæ.

95. *Coroll.* 2. Hinc dari potest (stante semper allata infiniti geometrici notione) infinitum altero majus, aut minus, & infinite parvum altero majus, aut minus, ac proinde idem signum ∞ varias quantitates infinite magnas, & idem signum 0 diversas quantitates infinite parvas induere sine termino possunt.

96. *Coroll.* 3. Infinitum igitur geometricum differt ab infinito metaphysico, adeoque non est alterum cum altero comparandum, aut confundendum.

97. *Coroll.* 4. Expressio $\frac{1}{0} = \infty$ sub eadem restri-

ſtrictione eſt admittenda, fit enim eadem quæ ſupra, ſed ordine inverſo, analogia $0:1=1:\infty$. At zero in ſenſu abſoluto nec unitatem continere, nec ab ea contineri poteſt, ſeu eſſe nequit pars unitatis, ut unitas eſt pars infiniti; ergo etiam inverſe repugnat, tam 0, quam ∞ in ſenſu abſoluto accipi poſſe.

98. *Coroll.* 5. Concludendum igitur, infiniti & nihili notiones adplicatas eſſe in Matheſi quantitatibus omni adſignabili majoribus quoad infinitum, minoribus quoad nihilum, in quo ſenſu non differunt ab indefiniti, aut indeterminati notionibus. Sic recta infinite magna deſignat in geometria rectam tantummodo indefinitam, vel indeterminatam, cui limites certi non præſcribuntur, ſeu quæ limites non habet præfixos.

99. *Scholion.* Cum a Mathematicis nominatur quantitas minor quantitate quavis adſignabili, intelligi debet, quantitatem iſtam non ſolum per menſuras ſub ſenſus cadentes exprimi non poſſe, ſed humanum quoque captum prorſus effugere, ita ut nulla vis imaginationis eam ſibi valeat repræſentare; quapropter ejus abſentia, aut præſentia nihil addere alicui menſuræ, aut ab ipſa detrahere poteſt, quod ad errorem ne menti quidem percipiendum perducat.

Miror interea, Analyſtas calculum finitorum ad infinitum abſolutum audacter traducere, ac ſi finitum & infinitum communibus gauderent proprietatibus. De infinito hoc unice ſcimus, quod non ſit finitum, quum directa ejus notio ſit prorſus inacceſſa mortalibus; quomodo igitur tantum audeant ignoro; ſique calculus ex voto cedit, hoc evenit, quod non infini-

tum

tum absolutum, sed relativum, adeoque finitum, inscii pertractant.

Quid dicendum de Calculo infinite parvorum? Hic scientia Infiniti communiter appellatur. Sed quo jure? Formula, quæ casus omnes possibiles in aliquo problemate sine limite includit, velut $\frac{m}{m+n}xy$, ubi universarum parabolarum quadratura designatur, exhaurit in Analystarum sententia infinitum, quod pro litteris indeterminatis m, n quilibet numerus affirmativus substitui potest. Verum nonne potius calculus indefiniti, sive indeterminati per substitutionem postmodum successive definiendi, aut determinandi appellari meretur? Sed e diverticulo in viam.

CAPUT VII.

De Algorithmo Radicalium.

100. DEfinit. Quantitates irrationales, quæ eundem indicem habeant, ut $\sqrt{ab}$, $\sqrt{cd}$, vel $\sqrt[3]{a^2b-y^3}$, & $\sqrt[3]{cx^2-byz}$ dicuntur *homogenea*; quæ vero eandem habent quantitatem sub signo inclusam, ut $\sqrt[2]{ab}$, $\sqrt[3]{ab}$, sive $\sqrt[3]{aa+xx}$, $\sqrt[4]{aa+nx}$, *commensurabiles* inter se, aut *communicantes* appellantur.

101. Propositio I. *Quantitates radicales, quæ mutationem subire possunt, in alias expressiones, salvo earum valore, commutare.*

Re-

Reſolutio I. Si nullus adſit coëfficiens, ex irrationalibus ad rationales reducantur; exponentes quantitatum, quæ potentiam radicalem conſtituunt, per radicis exponentem dividendo; tunc vero ſi in earum aliquibus exponens evadat unitati æqualis, libeatque ſignum radicale reſtituere, quantitates iſtæ poſſunt extra ſignum collocari. Sic $\sqrt{a^2bc}$ fit $= a^{\frac{2}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{bc}$; $\sqrt[r]{\frac{m^r ax}{n^r}}$, vel $\frac{\sqrt[r]{m^r ax}}{\sqrt[r]{n^r}} = \frac{m^{\frac{r}{r}} a^{\frac{1}{r}} x^{\frac{1}{r}}}{n^{\frac{r}{r}}}$

$$= \frac{m}{n}\sqrt[r]{ax}; \sqrt{162} = \sqrt{81 \cdot 2} = 9 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt{2}.$$

II. Si adſit coëfficiens, hic ad exponentis radicalis potentiam eve&tus ducatur in quantitatem ſub ſigno radicali contentam, eodem ſigno radicali retento. Sic $ab\sqrt[3]{c^2f} = \sqrt[3]{a^3b^3c^2f}$, quod $ab\sqrt[3]{c^2f} = a^{\frac{3}{3}} b^{\frac{3}{3}} c^{\frac{2}{3}} f^{\frac{1}{3}}$;

$$\frac{a^m}{b^n}\sqrt[r]{xy} = \frac{\sqrt[r]{a^{mr}xy}}{\sqrt[r]{b^{nr}}} = \sqrt[r]{a^{mr}\, b^{-nr}\, xy}.$$

III. Si exponentem radicalem ad aliquam potentiam attollere libeat, ad eandem potentiam elevetur etiam exponens quantitatum ſub ſigno radicali collectarum. Sic ſi exponens 2 radicalis $\sqrt[2]{ab}$ attolli debeat ad poteſtatem tertiam, erit $\sqrt[2]{ab} = \sqrt[6]{a^3b^3}$, quod

a

$a^{\frac{3}{6}} b^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$. Huc etiam pertinent quæ de eodem radicali diverſe exprimendo alibi (83.) monuimus. Hinc ſequentia profluunt.

102. *Coroll.* 1. Radicalis coëfficiens ad unitatem reduci poteſt; id ex num. II. exemplis patet.

103. *Coroll.* 2. Radicalis potentia fractionem exprimens ad quantitatem integram redigitur. Sic $\sqrt[n]{\frac{ab}{c}}$

$$= \frac{\sqrt[n]{abc^{n-1}}}{c^n} = \frac{a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} c^{\frac{n-1}{n}}}{c^{\frac{n}{n}}} = \frac{1}{c} \sqrt[n]{abc^{n-1}}.$$

104. *Coroll.* 3. Radicalis exponens ad terminos ſimpliciores reducitur, nam ſicuti per num. III. ad datam potentiam, intacto quantitatis valore, attollitur; contrario modo deprimitur, dividendo exponentem quantitatum potentiam radicalem conſtituentium per exponentem radicalem, ac poſtea fractiones reducendo. Sic $\sqrt[4]{a^2b^2} = a^{\frac{2}{4}} b^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ab}$; $a\sqrt[6]{(a^2b^2 - 2ab^3 + b^4)} = a\sqrt[3]{(ab - b^2)}$; $\sqrt[4]{100} = \sqrt[4]{4 \cdot 25} = \sqrt[2]{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$.

105. *Coroll.* 4. Radicalis exponentis diverſi ad eundem reducuntur. Sic $\sqrt[2]{a}, \sqrt[3]{b}$ tali pacto reductæ erunt $\sqrt[6]{a^3}, \sqrt[6]{b^2}$; etenim $\sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$, & $\sqrt[3]{b} = b^{\frac{1}{3}}$;

qua-

quapropter reductis exponentium fractionibus ad idem nomen, prodibunt $a^{\frac{3}{6}}$, & $b^{\frac{2}{6}}$; ergo $\sqrt[2]{a}$, & $\sqrt[3]{b}$ evadent $\sqrt[6]{a^3}$, & $\sqrt[6]{b^2}$; itidem $\frac{e}{f}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$; & $\frac{x}{z}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$ fiunt $\frac{e}{f}\sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^n}}$, & $\frac{x}{z}\sqrt[mn]{\frac{c^m}{d^m}}$.

106. *Coroll.* 5. Radicales ad simpliciorem expressionem reducuntur. Sic $\sqrt[m]{ay^m} = y\sqrt[m]{a}$; $\frac{1}{5}\sqrt[6]{\frac{a^6y^3z^3}{b^3c^3}} = \frac{1}{5}\sqrt[2]{\frac{a^3yz}{bc}} = \frac{a}{5bc}\sqrt{abcyz}$; $\sqrt[3]{120} = \sqrt[3]{8.15} = 2\sqrt[3]{15}$.

107. *Coroll.* 6. Radicalibus ad expressionem simpliciorem redactis, facile dignoscitur, an illarum duae sint inter se commensurabiles, seu communicantes; ex. gr. redactis $\sqrt{8}$, & $\sqrt{18}$ ad simpliciorem expressionem, oritur $2\sqrt{2}$, & $3\sqrt{2}$, quae quantitates quum sint homogeneae commensurabiles, fiet $2\sqrt{2} : 3\sqrt{2} = 2 : 3$; adeoque $\sqrt{8} : \sqrt{18} = 2 : 3$. Similiter ob $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$, & $\sqrt[n]{bc^n} = c\sqrt[n]{b}$, erit $\sqrt[n]{a^n b} : \sqrt[n]{bc^n} = a : c$.

108. *Coroll.* 7. Eadem radicalis multimodis exprimi potest; ex. gr. $\sqrt{20} = \sqrt{4.5} = 2\sqrt{5} = 10\sqrt{\frac{1}{5}} = 5\sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}}$, &c.

109.

109. *Scholion* I. Ceterum hæc Prop. ſic brevius & generalius reſolvi, ac demonſtrari poterat; nimirum quoniam $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m-1}{n}} \times x^{\frac{1}{n}}$, erit $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m-1}{n}} \times \sqrt[n]{x}$; *quod erat primum.* Igitur ſi fiat $m = 3$, $n = 2$, erit $\sqrt[2]{x^3} = x\sqrt{x}$, ſi vero $m = 7$, $n = 3$, erit $\sqrt[3]{x^7} = x^2 \sqrt[3]{x}$; itidẽ $\sqrt[2]{(az+zz)^3} = (az+zz) \times \sqrt{(az+zz)}$.

Viciſſim quia $x^m \sqrt[n]{a} = x^m a^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{mn}{n}} a^{\frac{1}{n}}$, erit $x^m \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{ax^{mn}}$; *quod erat ſecundum.*

Tandem $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$; ſed $x^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{mr}{nr}} = \sqrt[nr]{x^{mr}}$; ergo $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[nr]{x^{mr}}$; *quod erat tertium.*

110. *Scholion* II. Non eſt omittendum, tunc eſſe $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mr}{nr}}$, cum agitur de valoribus quantitatum realium, ſecus ſi valores reales ſunt cum imaginariis commixti; ſed hoc opportuniori loco demonſtrandum reſervamus.

111. Propoſitio II. *Quantitates radicales addere, & ſubtrahere.*

Reſolutio. Quantitates radicales addendæ, vel ſubtrahendæ ad ſimpliciorem expreſſionem, ſi fieri poteſt, prius reducantur (106.), tum ſi ſint homogeneæ & communicantes, ſive ſi eodem exponente, & ea-

eadem sub signo radicali expressione donentur, coëfficientium summa, vel differentia accipiatur; sin minus additio, vel subtractio, signis $+$, vel $-$ interpositis indicetur. Sic radicalium $4\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, sum ma $7\sqrt{2}$, differentia $\sqrt{2}$. Similiter radicalium $a + 4\sqrt{ab}$ $- 3\sqrt[3]{bc^2} - 2\sqrt[4]{xy^3}$, & $b - 7\sqrt{ab} - 2\sqrt[3]{bc^2} + 5\sqrt[4]{xy^3}$ summa $a + b - 3\sqrt{ab} - 5\sqrt[3]{bc^2} + 3\sqrt[4]{xy^3}$, differentia $a - b + 11\sqrt{ab} - \sqrt[3]{bc^2} - 7\sqrt[4]{xy^3}$.

112. Propositio III. *Quantitates radicales multiplicare.*

Resolutio. Facta prius ad eundem exponentem reductione (105.), alter coëfficiens in alterum, & altera expressio sub signo radicali in alteram, iisdem signis radices exprimentibus retentis, more consueto multiplicentur, & prodibit factum quæsitum. Est enim $2\sqrt[n]{ab} = 2a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}$, pariterque $4\sqrt[n]{cx} = 4c^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}}$; sed $2a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}} \times 4c^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}} = 8\sqrt[n]{abcx}$; ergo $2\sqrt[n]{ab} \times 4\sqrt[n]{cx} = 8\sqrt[n]{abcx}$; quoniam vero pro coëfficientibus 2, & 4, & pro literis ab, cx quælibet aliæ magnitudines tam incomplexæ, quam complexæ intelligi possunt, ratio Regulæ patet. Sic $\overline{2a + \sqrt{(a^2 - x^2)}} \times \overline{5a - \sqrt{(a^2 - x^2)}} = 9a^2 + 3a\sqrt{(a^2 - x^2)} + x^2$. Itē

 $\sqrt[3]{a^2b^4}$

$\sqrt[3]{a^2b^4}\times\sqrt{a^4b^5} = \sqrt[6]{a^4b^8}\times\sqrt[6]{a^{12}b^{15}} = \sqrt[6]{a^{16}b^{23}} =$
$a^{\frac{12+4}{6}}\,b^{\frac{18+5}{6}} = a^2b^3\times a^{\frac{4}{6}}b^{\frac{5}{6}} = a^2b^3\sqrt[6]{a^4b^5}$. Brevius
$a^{\frac{2}{3}+\frac{4}{2}}\times b^{\frac{4}{3}+\frac{5}{2}} = a^{\frac{16}{6}}b^{\frac{23}{6}}$ &c.

113. Propoſitio IV. *Quantitatis radicales dividere.*

Reſolutio I. Fiat fractio, cujus denominator ſit diviſor, & numerator dividendus, tum utraque radice ad eundem exponentem reducta (105.), diviſio per regulas communes jam traditas (24.), uti fit in rationalibus, inſtituatur, & emerget quotus quæſitus. Etenim $6\sqrt[n]{abc^2} = 6a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}c^{\frac{2}{n}}$, & $2\sqrt[n]{bcx} = 2b^{\frac{1}{n}}c^{\frac{1}{n}}x^{\frac{1}{n}}$; quare $\dfrac{6\sqrt[n]{abc^2}}{2\sqrt[n]{bcx}} = 3a^{\frac{1}{n}}c^{\frac{1}{n}}x^{-\frac{1}{n}} = 3\sqrt[n]{\frac{ac}{x}}$. Itidem

$$\frac{\sqrt{ab^2}}{\sqrt{2\sqrt[3]{ab^2}}} = \sqrt{\frac{ab^2}{2a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}a^{1-\frac{1}{3}}b^{2-\frac{2}{3}}}$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}\,ab^2.$$

Similiter $\dfrac{9a+3\sqrt{ac}-4b+2\sqrt{bc}}{3\sqrt{a}-2\sqrt{b}+\sqrt{c}} = 3\sqrt{a}+2\sqrt{b}$. Nam $\dfrac{9a}{3\sqrt{a}} = \dfrac{9\sqrt{aa}}{3\sqrt{a}}$ dat $3\sqrt{a}$ pro primo quotientis termino; duc modo $3\sqrt{a}$ in diviſorem, & habebis factũ $9a - 6\sqrt{ab}$ +

$+ 3\sqrt{ac}$, quod e dividendo subductum relinquit secundum dividendum $6\sqrt{ab} - 4b + 2\sqrt{bc}$. Divisionem prosequere, & $\frac{6\sqrt{ab}}{3\sqrt{a}}$ constituet $2\sqrt{b}$ pro secundo quotientis termino; hoc vero per divisorem multiplicato, oritur productum $6\sqrt{ab} - 4b + \sqrt{bc}$, quo e secundo dividendo sublato, nihil remanet. Quotiens ergo quæsitus est $3\sqrt{a} + 2\sqrt{b}$.

II. Si expedit quotientem radicalem in fractionem, cujus denominator sit rationalis, transformare, multiplicetur fractio supra & infra per denominatorem, uno saltem ex hujus signis mutato; tum peracta justa multiplicatione, vel fractio denominatorem habebit rationalem, vel non; si non, repetatur operatio, donec denominator evadat rationalis. Methodum Exempla declarabunt.

Exemplum I. Esto quantitas $a - b$ per $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$ dividenda; multiplicetur fractio $\frac{a-b}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}}$ supra & infra per $\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}$; erit $\frac{(a-b)(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})}{(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})} =$

$$\frac{(a-b)(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})}{\sqrt[4]{a^2} - \sqrt[4]{b^2}} = \frac{(a-b)(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \quad (94).$$

Quoniam vero denominator persistit irrationalis,

 mul-

multiplicetur iterum ista fractio supra & infra per

$\sqrt{a}+\sqrt{b}$, ac proveniet $\dfrac{(a-b)(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$

$=(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{b^2})=\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{a^2b}-\sqrt[4]{b^3}$

$= \dfrac{a-b}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$.

Exemplum II. Sit binomium $a+b$ dividendum per trinomium $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$; Facta fractione erit $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\dfrac{(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})}$ $=\dfrac{(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a-b+c-\sqrt{4ac}}$. Compendii gratia fiat $a+b=h$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}=\sqrt{d}$, $a-b+c=f$, valoribusque substitutis, prodibit $\dfrac{(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})}{a-b+c-\sqrt{4ac}}$ $=\dfrac{h\sqrt{d}}{f-\sqrt{4ac}}=\dfrac{\sqrt{dh^2}(f+\sqrt{4ac})}{(f-\sqrt{4ac})(f+\sqrt{4ac})}=\dfrac{h\sqrt{d}\,(f+\sqrt{4ac})}{f^2-4ac}$. Itaque si ponatur $a=1$, $b=2$, $c=3$; erit $a+b=h=3$; $a-b+c=f=1-2+3=2$; $f^2=4$; $4ac=12$; $\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c}=\sqrt{d}=1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$; quare substituendo, ac reducendo, reperietur $\dfrac{3}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{4}\sqrt{2}+\dfrac{3}{4}\sqrt{6}$.

114. *Scholion.* Non omittendum, in divisione quantitatis radicalis per radicalem tunc haberi posse quo-

quotum rationalem, cum potentiæ radicales sunt inter se in ratione quadrati ad quadratum. Sic $\sqrt{c}$ divisa per $\sqrt{c+\frac{cb^2}{aa}+\frac{2bc}{a}}$ sufficit pro quoto $\frac{a}{a+b}$; est enim $c:c+\frac{cb^2}{aa}+\frac{2bc}{a}=a^2:a^2+2ab+b^2$.

115. Propositio V. *Radicales ad datam potestatem attollere.*

Resolutio. Coëfficientibus ad datam potestatem elatis, potentiæ radicales ad eandem efferantur, eodem signo radicali retento. Esto enim quævis quantitas radicalis $3\sqrt[n]{ab}$ elevanda ad potestatem m; quoniam $3\sqrt[n]{ab}=3\times a^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}$, hæc quantitas elevata ad potestatem m fit $3^m a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}=3^m\sqrt[n]{a^m b^m}$; ergo ratio Regulæ patet.

116. *Coroll.* 1. Si potentiæ radicales complexæ ad datam potestatem sint evehendæ, signis radicalibus deletis, ad dictam potestatem velut rationales eleventur; deinde signo rationali restituto, partes reducendæ, si quæ sunt, ut moris est, reducantur. Sic $\sqrt{(a+b)}$ ad secundam potestatem evecta, vel per se ipsam multiplicata evadit $\sqrt{(a^2+2ab+b^2)}=a+b$, & $\sqrt[3]{(a+b)}$ ad eandem secundam potestatem elevata fit $\sqrt[3]{(a^2+2ab+bb)}$.

117. *Coroll.* 2. Si quantitatis complexæ singuli termini sub radicibus ejusdem indicis lateant, eleventur ad potestatem propositam, prout agitur in rationalibus, facta postmodum ubi oportet reductione. Sic si quantitas $\sqrt{a} + \sqrt{x}$ sit ad quadratum attollenda, in se ipsam ducta evadet $\sqrt{aa} + 2\sqrt{ax} + \sqrt{xx} = a + x + 2\sqrt{ax}$; elevata ad cubum fiet $\sqrt{a^3} + 3a\sqrt{x} + 3x\sqrt{a} + \sqrt{x^3}$.

118. *Coroll.* 3. Si quantitatis complexæ ad potestatem aliquam evehendæ singuli termini sub diversi exponentis radicibus existant, signa radicalia ad eundem exponentem prius reducantur, deinde fiat elevatio secundum regulas antecedentes. Sic $\sqrt{a} + \sqrt[3]{b} = a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3}{6}} + b^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{a^3} + \sqrt[6]{b^2}$ evecta ad quadratum erit $\sqrt[6]{a^6} + 2\sqrt[6]{a^3b^2} + \sqrt[6]{b^4} = a + 2\sqrt[6]{a^3b^2} + \sqrt[3]{b^2}$.

119. *Coroll.* 4. Generatim vero revocata prima formula generali jam tradita (67.) quælibet quantitas ex terminis radicalibus conflata ad quamcumque potentiam ejusdem ope attolli potest. Esto ex. gr. quantitas $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, sive $a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ ad tertiam potestatem attollenda. Erit $p = a^{\frac{1}{2}}$, $q = b^{\frac{1}{2}}$, $m = 3$; quare $p^m = a^{\frac{3}{2}}$; $\frac{m}{1} p^{m-1} q = 3ab^{\frac{1}{2}}$; $\frac{(m.\overline{m-1})}{1 . 2} p^{m-2} q^2 =$

$3a^{\frac{1}{2}}$

$3a^{\frac{1}{2}}b; \frac{m.\overline{m-1}.\overline{m-2}}{1.2.3}p^{m-3}q^3 = b^{\frac{3}{2}}; \frac{(m.\overline{m-1}.\overline{m-2}.\overline{m-3})}{1.2.3.4}$ $p^{m-4}q^4 = o$. Ergo abrupta ferie, poteftas quæfita eft $a^{\frac{3}{2}} + 3ab^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{1}{2}}b + b^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + \sqrt{b^3}$ prorfus ut fupra (117.). Quod fi $\sqrt{b}$, feu $b^{\frac{1}{2}}$ fit quantitas negativa, erit b pofitiva, & $b^{\frac{3}{2}}$ negativa; quare tunc tertia binomii $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ poteftas erit $a^{\frac{3}{2}} - 3ab^{\frac{1}{2}} + 3a^{\frac{1}{2}}b - b^{\frac{3}{2}}$, five $\sqrt{a^3} - 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - \sqrt{b^3}$.

120. Propofitio VI. *Ex quantitate radicali radicem extrahere.*

Refolutio I. Si quantitates radicales fint fimplices, exponens figni radicalis multiplicetur per exponentem radicis quæfitæ. Si vero adfint coëfficientes; vel fub figno radicali prius transferantur (101.), aut eorum exponentes per imperatæ radicis exponentem dividantur. Sit enim extrahenda radix n ex $2\sqrt[m]{a^r} = \sqrt[m]{2^m a^r}$; quoniam $\sqrt[m]{2^m a^r} = 2^{\frac{m}{m}}a^{\frac{r}{m}}$, ejus radix n erit $2^{\frac{m}{mn}}a^{\frac{r}{mn}} = 2^{\frac{1}{n}}\sqrt[mn]{a^r}$. Sic fi radix quadrato-quadrata erui debeat ex $a\sqrt[2]{b^2}$, fiet $a^{\frac{1}{4}}\sqrt[12]{b^2} = a^{\frac{1}{4}}\sqrt[6]{b} = \sqrt[12]{a^3b^2}$.

 II.

II. Si quantitas radicalis sit composita. ex terminis partim rationalibus, partim irrationalibus, radicis extractio tentetur eadem methodo, quam in terminis omnibus rationalibus exhibuimus (85.). Esto ex. gr. educenda radix quadrata ex quantitate $9a - 12\sqrt{ab} + 4b$. Extraho radicem ex $9a$, quæ est $3\sqrt{a}$, & hanc seorsum scribo pro primo termino radicis quæsitæ; elevo $3\sqrt{a}$ ad potestatem $2 - 1$, & quoniam eadem remanet, per hanc duplicatam divido secundum terminum $-12\sqrt{ab}$, & fit quotus $-2\sqrt{b}$ pro secundo radicis quæsitæ termino; quum autem attollendo $3\sqrt{a} - 2\sqrt{b}$ ad potestatem secundam, & productum ex data potestate subtrahendo, nihil superfit, $3a - 2\sqrt{b}$ est radix quæsita.

III. Quod si datum binomium vel polynomium conditionibus necessariis ita careat, ut justa radix extrahi nequeat, tunc radix ista exprimitur per signum radicale omnes polynomii terminos comprehendens. Sic binomii $2 + \sqrt{7}$ radix quadrata designabitur per

$\sqrt{\overline{2 + \sqrt{7}}}$, vel per $\sqrt{(2 + \sqrt{7})}$; cubica per $\sqrt[3]{\overline{2 + \sqrt{7}}}$,

vel per $\sqrt[3]{(2 + \sqrt{7})}$; & sic de reliquis; quæ radices ita connexæ *Radices universales* appellantur.

CAPUT VIII.

De Algorithmo Radicalium tam universalium, quam impossibilium.

121. PRopositio I. *Radices universales ad eandem denominationem reducere.*

Re-

Resolutio I. Sublato signo universali, exponentes per fractionem designentur, perinde ac fit quantitates irrationales ad rationales reducendo.

II. Fractiones istæ ad eundem denominatorem per regulas traditas (33.) reducantur.

III. Quantitates, quæ sub signo universali latebant, eleventur ad potestatem, quam indicat dictæ fractionis exponentialis numerator.

Sint ex. gr. $\sqrt{a+\sqrt{bc}}$, & $\sqrt[3]{b-\sqrt[3]{cd}}$; evadent $(a+\sqrt{bc})^{\frac{1}{2}}$, & $(b-\sqrt[3]{cd})^{\frac{1}{3}}$; reductæ ad idem nomen fient $(a+\sqrt{bc})^{\frac{3}{6}}$, & $(b-\sqrt[3]{cd})^{\frac{2}{6}}$; ergo signum radicale commune erit $\sqrt[6]{\ }$; quantitas $(a+\sqrt{bc})^{\frac{3}{6}}$ ob numeratorem 3 est ad tertiam potentiam elevanda, alia vero $(b-\sqrt[3]{cd})^{\frac{2}{6}}$ ob numeratorem 2 ad secundam, ergo peracta operatione prodibunt duæ radices universales $\sqrt[6]{a^3+3abc+(3a^2+bc)\sqrt{bc}}$, & $\sqrt[6]{b^2-2b\sqrt[3]{cd}+\sqrt[3]{c^2d^2}}$ æquales prioribus, & eadem præditæ denominatione.

122. Propositio II. *Radicales universales ad simplicem expressionem reducere.*

Resolutio. Reducantur primum radicales sub universali signo inclusæ, deinde radix universalis (106.).

Sit

Sit ex. gr. $\sqrt{a^2b+\sqrt{a^4b^2c}}$. Radicalis inclusa $\sqrt{a^4b^2c}$ reducta evadit $a^2b\sqrt{c}$, ac proinde $\sqrt{a^2b+\sqrt{a^4b^2c}} = \sqrt{a^2b+a^2b\sqrt{c}}$, & eandem signo universali operationem adplicando prodit $a\sqrt{b+b\sqrt{c}}$, quæ est reductio quæsita.

123. *Coroll.* Vicissim Radicalis universalis coëfficiens ad unitatem reduci potest. Sic $a^{n}\sqrt[m]{b+b^{m}\sqrt[r]{c}}$ reductis ad unitatē coëfficientibus fit $\sqrt[m]{a^{mn}(b+\sqrt[r]{b^{mr}c})}$ (102.).

124. Propositio III. *Radicales universales addere, & subtrahere.*

Resolutio. Reducantur prius, si oporteat, ad eandem denominationem (105.), & ad simpliciorem expressionem (106.); tum fiat additio, vel subtractio, signum + in primo casu, in secundo vero signum — perinde ac reliquis in radicalibus interponendo. Sic si quantitates datæ sint $5\sqrt{ab+b\sqrt{cf}}$, $2\sqrt{ab+b\sqrt{cf}}$, $3\sqrt{bc-x\sqrt{ty}}$, earum summa erit $7\sqrt{ab+b\sqrt{cf}} + 3\sqrt{bc-x\sqrt{ty}}$; differentia $3\sqrt{ab+b\sqrt{cf}}-3\sqrt{bc-x\sqrt{ty}}$.

125. Propositio IV. *Radicales universales multiplicare.*

Re-

Resolutio. Remotis signis universalibus eodem exponente gaudentibus, fiat multiplicatio, ut in ceteris radicalibus (104.); deinde producto signum universale rursus præfigatur. Demonstratio est eadem. Sit

ex.gr. quantitas $5\sqrt{ab - b\sqrt{cf}}$ ducenda in $4\sqrt{bc - x\sqrt{cy}}$; erit $5(ab - b\sqrt{cf}) \times 4(bc - x\sqrt{cy}) = 20(ab^2c -$

$b^2c\sqrt{cf} - abx\sqrt{cy} + bx\sqrt{cfcy})$; quare $20\sqrt{ab^2c - b^2c\sqrt{cf}}$

$\overline{- abx\sqrt{cy} + bx\sqrt{cfcy}} = 5\sqrt{ab - b\sqrt{cf}} \times 4\sqrt{bc - x\sqrt{cy}}$.

126. Propositio V. *Radices universales dividere.*

Resolutio I. Amotis signis universalibus ad eundem exponentem, si oporteat jam reductis, divisionis operatio ut in ceteris radicalibus (112.) instituatur; tum si idem signum universale quoto restituatur; hic erit ille, qui quærebatur. Sic si dividi debeat $\sqrt{20 + \sqrt{3}}$ per $\sqrt{5}$, divide $20 + \sqrt{3}$ per 5, & quoto $4 + \frac{1}{5}\sqrt{3}$ restitue signum universale, erit $\sqrt{4 + \frac{1}{5}\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{20 + \sqrt{3}}}{\sqrt{5}}$. Simili modo divisionem successivam ineundo, reperietur

$$\frac{\sqrt{a^2x - ac\sqrt{fx} + ax\sqrt{bc} - c\sqrt{bcfx}}}{\sqrt{ax - c\sqrt{fx}}} = \sqrt{a + \sqrt{bc}}.$$

II.

II. Si dividenda foret quantitas $\sqrt{3+\sqrt{5}}$ per $\sqrt{2+\sqrt{3}}$; fignis univerfalibus ablatis, quoniam $\frac{3+\sqrt{5}}{2+\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{5})(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 6+2\sqrt{5}-3\sqrt{3}-\sqrt{15}$; erit $\sqrt{6+\sqrt{20}-\sqrt{27}-\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

127. Propofitio VI. *Radices imaginarias, feu impoffibiles quadraticas addere, & fubtrahere.*

Refolutio. Additio & fubtractio fiunt fignis $+$, $-$ ex more interpofitis. Sic fi proponantur quantitates $a+4b\sqrt{-a}+7c\sqrt{-b}$, & $a-4b\sqrt{-a}+3c\sqrt{-b}$, fumma erit $2a+10c\sqrt{-b}$; differentia $8b\sqrt{-a}+4c\sqrt{-b}$.

128. Propofitio VII. *Radices imaginarias quadraticas multiplicare.*

Refolutio I. Si radix imaginaria fit per fe ipfam multiplicanda, deleto figno radicali, quantitas fuperftes erit productum quæfitum. Sic $\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = -1$, pariterque $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a} = -a$. Etenim pro quantitatis $-a$ radice extrahenda fcribitur $\sqrt{-a}$; fed radicem aliquam quadratam per fe ipfam multi-

tiplicando, ea prodit quantitas, cujus illa est radix; ergo $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = -a$.

II. Si radicum altera sit realis, altera imaginaria, remoto signo radicali, fiat ut moris est multiplicatio, redditoque eodem signo, habebitur factum quæsitum. Sic $\sqrt{a} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-a}$, & $\sqrt{a} \times \sqrt{-a}$, aut $\sqrt{b} \times \sqrt{-a} = \sqrt{-ab}$. Quum enim $-a$ idem sit cum $a \times -1$, extrahendo radicem quadratam, etiam $\sqrt{-a}$, & $\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$ unum atque idem erunt, adeoque $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$. Quare quum sit quoque $\sqrt{-b} = \sqrt{b} \times \sqrt{-1}$, erit $\sqrt{a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{-1} = \sqrt{ab} \times \sqrt{-1}$. Fiat enim $ab = c$, erit $\sqrt{ab} \times \sqrt{-1} = \sqrt{c} \times \sqrt{-1} = \sqrt{-c} = \sqrt{-ab}$.

III. Si radices imaginariæ sint homogeneæ, amoto signo radicali, fiat more consueto multiplicatio, ac facto idem signum radicale præfigatur, signo tamen, quod signum radicale præcedebat, mutato; nimirum $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$. Etenim $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$, pariterque $\sqrt{-b} = \sqrt{b} \times \sqrt{-1}$;
sed

sed $\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$ ducta in $\sqrt{b} \times \sqrt{-1} = \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}$; ergo $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$.

IV. Hæc ita quoque brevius demonstrantur $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = (-a)^{\frac{1}{2}} \times (-a)^{\frac{1}{2}} = (-a)^{\frac{2}{2}} = -a$; $\sqrt{a} \times \sqrt{-1} = (-1)^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} \times -a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-a}$; $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -a^{\frac{1}{2}} \times -b^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}} \times (-1)^{\frac{1}{2}} \times b^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{2}{2}} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{ab}$.

V. Si radices imaginarias eadem, vel diversa signa præcedant, præter regulas allatas servetur regula generalis tam pro consecutione, quam pro permutatione signorum (27.). Si vero adsint coëfficientes, quos sub radice collocare lubeat, ipsis substituantur æquivalentes eodem signo radicali affecti, ac deinde fiat consueta multiplicatio. Sic $-\sqrt{-a} \times -\sqrt{-a} = -a$; $-\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = a$; $a\sqrt{-b} = \sqrt{aa} \times \sqrt{-b} = \sqrt{-a^2b}$; $-3\sqrt{-b} = -\sqrt{9} \times \sqrt{b-} = -\sqrt{-9b}$.

129. *Coroll.* 1. Etiam dictæ quantitates radicales imaginariæ ad simpliciorem, commodioremque expres-

pressionem reduci possunt. Sic $\sqrt{-ab} = \sqrt{ab} \times \sqrt{-1}$; $\sqrt{-aab} = a\sqrt{-b} = a\sqrt{b}\sqrt{-1}$, &c.

130. *Coroll.* 2. Quantitates reales in radicales imaginarias semper commutari possunt, & quandoque vicissim. Nam $a = -\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, & contra; $\pm\sqrt{abc} = \mp\sqrt{a}\sqrt{-b}\sqrt{-c} = \mp\sqrt{b}\sqrt{-a}\sqrt{-c} = \mp\sqrt{c}\sqrt{-a}\sqrt{-b} = \mp\sqrt{-ab}\sqrt{-c} = \mp\sqrt{-ac}\sqrt{-b} = \mp\sqrt{-bc}\sqrt{-a}$, & contra.

131. Propositio VIII. *Radicales imaginarias quadraticas dividere.*

Resolutio I. Reducantur prius, si oporteat, ad simpliciorem expressionem, deinde facta fractione, quantitates tam in numeratore, quam in denominatore communes, quæcumque sint, elidantur; sive divisio ut in ceteris radicalibus realibus compositis (113. n. I.), si fieri potest, instituatur.

II. Si vero radicalis imaginaria monomia, vel polynomia per binomium, vel polynomium radicale imaginarium dividenda, sit ad denominatorem realem reducenda, servetur Regula pro radicibus in simili casu jam exposita (126. n. II.).

Exempla pro n. I. $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{-1}}{\sqrt{a}} = \sqrt{-1}$;

$\sqrt{a}$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{-1}};\ \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{-ab}} = \frac{\sqrt{abc}}{\sqrt{ab}\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{-1}};\ \frac{-a}{\sqrt{-1}} = \frac{a\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}}{\sqrt{-1}} = a\sqrt{-1};$$

$$\frac{\sqrt{ab+bc}}{\sqrt{(-a-c)}} = \frac{\sqrt{(a+c)}\sqrt{b}}{\sqrt{(a+c)}\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{-1}};\ \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}-\sqrt{-c}}$$

$$= \frac{\sqrt{a}\sqrt{-1}}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}};\ \frac{1+\sqrt{-1}}{1-\sqrt{-1}} =$$

$$\frac{(1+\sqrt{-1})(1+\sqrt{-1})}{(1-\sqrt{-1})(1+\sqrt{-1})} = \sqrt{-1};\ \frac{a\sqrt{bd}+3b\sqrt{cd}}{-\sqrt{-d}}$$

$= a\sqrt{-b}+3b\sqrt{-c}$. Nam $a\sqrt{bd} = -a\times -\sqrt{bd} = -a\times\sqrt{-b}\times\sqrt{-d}$; quapropter $\frac{-a\sqrt{-b}\times\sqrt{-d}}{-\sqrt{-d}} = a\sqrt{-b}$, qui est primus quoti quæsiti terminus. Ducatur $a\sqrt{-b}$ in divisorem $-\sqrt{-d}$; factum erit $a\sqrt{bd}$, quo subducto ex dividendo, habetur residuum $3b\sqrt{cd}$ per $-\sqrt{-d}$ dividendum; sed $3b\sqrt{cd} = -3b\times-\sqrt{cd} = -3b\times\sqrt{-c}\times\sqrt{-d}$; ergo $\frac{-3b\times\sqrt{-c}\times\sqrt{-d}}{-\sqrt{-d}} =$

$= 3b\sqrt{-c}$, qui erit secundus quotientis quæsiti terminus; hoc autem per $-\sqrt{-d}$ multiplicato, oritur productum $3b\sqrt{cd}$, quo ex residuo $3b\sqrt{cd}$ sublato nihil superest. Quotus ergo quæsitus est $a\sqrt{-b} + 3b\sqrt{-c}$.

Exempla pro n. II. Dividere oporteat $\sqrt{-a}$ per $\sqrt{-b} - \sqrt{-c}$, ita ut quoti denominator sit realis; quoniā $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}-\sqrt{-c}} = \frac{\sqrt{-a}(\sqrt{-b}+\sqrt{-c})}{(\sqrt{-b}-\sqrt{-c})(\sqrt{-b}+\sqrt{-c})}$ $= \frac{-\sqrt{ab}-\sqrt{ac}}{-b+c} = \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}}{b-c}$ (44.); erit $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}-\sqrt{-c}}$ $= \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}}{b-c}$, quod cum quoto antecedente congruit; est enim $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a}\times(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{(\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{b}+\sqrt{c})}$ $= \frac{\sqrt{ab}+\sqrt{ac}}{b-c}$. Esto $12\sqrt{-15} + \frac{1}{\sqrt{-10}-\sqrt{-2}-\sqrt{-3}}$; quoniam $\frac{1}{\sqrt{-10}-\sqrt{-2}-\sqrt{-3}} =$

 $\sqrt{-10}$

$$\frac{\sqrt{-10}+\sqrt{-2}+\sqrt{-3}}{(\sqrt{-10}-\sqrt{-2}-\sqrt{-3})(\sqrt{-10}+\sqrt{-2}+\sqrt{-3})}=$$

$\frac{\sqrt{-10}+\sqrt{-2}+\sqrt{-3}}{-5+2\sqrt{6}}$, multiplicando supra & infra per $-5-2\sqrt{6}$, proveniet $\frac{(\sqrt{-10}+\sqrt{-2}+\sqrt{-3})(-5-2\sqrt{6})}{(-5+2\sqrt{6})(-5-2\sqrt{6})}=-5\sqrt{-10}$ $-11\sqrt{-2}-9\sqrt{-3}-4\sqrt{-15}$; quare $12\sqrt{-15}$ $+\frac{1}{\sqrt{-10}-\sqrt{-2}-\sqrt{-3}}=8\sqrt{-15}-5\sqrt{-10}$ $-11\sqrt{-2}-9\sqrt{-3}$.

132. Propositio IX. *Quantitas algebrica quaecumque, imaginariis constans, semper redigi poterit ad expressionem $A+B\sqrt{-1}$, ubi A, B sunt quantitates reales, rationales, aut irrationales.*

Dem. I. Quum enim sit $\sqrt{-b}=\sqrt{b}\sqrt{-1}$, quantitates hujusmodi tam additae quantitatibus realibus, quam ab iisdem subductae, hanc semper servabunt formam $a+b\sqrt{-1}\pm g\pm h\sqrt{-1}$, quae ad expressionem $A+B\sqrt{-1}$ reducetur, ponendo $a\pm g=A$, & $b\pm h=B$.

II. Quantitates imaginariae in se ductae, nempe $(a+b\sqrt{-1})(g+h\sqrt{-1})=ag-bh+bg\sqrt{-1}$ +

$+ab\sqrt{-1}$ ad eandem expressionem reducentur, factis $ag - bb = A$, & $bg + ab = B$.

III. Item si hujusmodi quantitates dividantur; nam $\frac{a + b\sqrt{-1}}{g + b\sqrt{-1}} = \frac{(a+b\sqrt{-1})(g-b\sqrt{-1})}{(g+b\sqrt{-1})(g-b\sqrt{-1})}$ $= \frac{ag + bb + bg\sqrt{-1} - ab\sqrt{-1}}{gg + bb}$, statuendo $\frac{ag + bb}{gg + bb} = A$, & $\frac{bg - ab}{gg + bb} = B$.

IV. Quoniam vero $(a + b\sqrt{-1})^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b\sqrt{-1} - \frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 - \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} \times a^{n-3} b^3 \sqrt{-1} + \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2} \cdot \overline{n-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4 + \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2} \cdot \overline{n-3} \cdot \overline{n-4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^{n-5} b^5 \sqrt{-1}$, &c., si fiat $a^n - \frac{n \cdot \overline{n-1}}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 + \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2} \cdot \overline{n-3}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^{n-4} b^4$ &c. $= A$, ac præterea $\Big(\frac{n}{1} a^{n-1} b - \frac{n \cdot \overline{n-1} \cdot \overline{n-2}}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3$

G 2 +

$+\frac{n.\overline{n-1}.\overline{n-2}.\overline{n-3}.\overline{n-4}}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}a^{n-5}b^5\Big)\sqrt{-1} =$

$B\sqrt{-1}$, erit $(a+b\sqrt{-1})^n = A+B\sqrt{-1}$.

V. Haud secus si fuerit $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}$, ponendo $\frac{1}{m}$ pro n in serie antecedenti, potestates enim, ad quas $b\sqrt{-1}$ assurgit, eædem semper persistunt.

VI. Quin etiam ob $(a+b\sqrt{-1})^{-n} = \frac{1}{(a+b\sqrt{-1})^n}$, quæ per num. IV. reduci potest ad formam $\frac{1}{g+b\sqrt{-1}}$, si hæc supra, & infra multiplicetur per $g-b\sqrt{-1}$, prodibit ut supra $\frac{g-b\sqrt{-1}}{gg+bb}$; quare statuendo $\frac{g}{gg+bb} = A$, $\frac{-b}{gg+bb} = B$, redibit $(a+b\sqrt{-1})^{-n}$ $= A+B\sqrt{-1}$.

VII. Esto tandem $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$. Erit $(a+$

$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = a^{m+n\sqrt{-1}}(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$, nam $a(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1}) = a+b\sqrt{-1}$. Habemus igitur primùm $(1+\frac{b}{a}\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = 1+(m+n\sqrt{-1})\frac{b}{a}\sqrt{-1}+\frac{1}{2}(m+n\sqrt{-1})(m+n\sqrt{-1}-1)\times-\frac{b^2}{a^2}+$ &c. $= 1-\frac{nb}{a}+\frac{mb}{a}\sqrt{-1}+\frac{1}{2}(m+n^2-m^2)\frac{b^2}{a^2}-\frac{1}{2}(2mn\sqrt{-1}+n\sqrt{-1})\frac{b^2}{a^2}+$ &c. Etenim quum sit $a=1\times a$, attollendo ad poteſtatem $m+n\sqrt{-1}$, fit $a^{m+n\sqrt{-1}} = 1^{m+n\sqrt{-1}}\times a^{m+n\sqrt{-1}}$ (65.); ſed $a^{m+n\sqrt{-1}} = 1\times a^{m+n\sqrt{-1}}$; ergo $1^{m+n\sqrt{-1}}=1$. Quamobrem poſitis $1-\frac{nb}{a}+\frac{1}{2}(m+n^2-m^2)\frac{b^2}{a^2}+$ &c. $=M$; & $\frac{mb}{a}-\frac{1}{2}(2mn+n)\frac{b^2}{a^2}$ &c. $=N$, erit

 (1+

$(1+\frac{b}{a})^{m+n\sqrt{-1}} = M+N\sqrt{-1}$. Id quoque aliter alibi oſtendemus.

Fiat deinde $a = 1 \pm c$; eritque $a^{m+n\sqrt{-1}} = (1\pm c)^{m+n\sqrt{-1}} = \alpha+\beta\sqrt{-1}$, ſi eadem operatio iteretur. Ergo $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = a^{m+n\sqrt{-1}} \times (1+\frac{b}{a}\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = (\alpha+\beta\sqrt{-1})(M+N\sqrt{-1}) = A+B\sqrt{-1}$ per num. II. *Quod erat* &c.

Exigit autem caſus iſte VII., ut formula Newtoniana pro binomio ad quamlibet poteſtatem evehendo vera demonſtretur, quicumque ſit binomii exponens, videlicet non poſitivus & integer tantum, itidemque negativus & fractus, ſed etiam imaginarius; quod opportuniori loco (662.) reſervamus.

IN-

INTRODUCTIO
IN
ALGEBRAM

SECTIO II.

CAPUT I.

DE ANALYSI

Definitiones.

133. ANalysis est Ars Problemata per Æquationes resolvendi.

134. *Æquatio* est duarum quantitatum cujuslibet generis inter se, vel unius cum zero per signum $=$ comparatio, velut $x = \frac{ab}{c}$; $2ax - xx = bc$; $ax - bc = 0$, &c.

135. Partes terminis quibuslibet compositæ per dictum signum $=$ separatæ, æquationis *membra* nuncupantur.

136. Terminus quantitatibus omnibus cognitis constans, *homogeneus comparationis* appellatur.

137. Æquationis termini vocantur *homogenei*, cum unusquisque (exponentes omnes addendo) ad eandem dimensionem assurgit.

138. Hinc homogeneorum lex *servata* dicitur, cum quilibet terminus est ejusdem dimensionis.

139. Contra homogeneorum lex dicitur *non servata*, cum terminorum nonnulli sunt dimensionis diversæ, ut $aaxx + bz^2 = cc$.

140. Æquatio dicitur *simplex*, seu *primi gradus*, si quantitas incognita est unius dimensionis, ut $x = a + b - c$; dicitur autem *quadratica*, seu *secundi gradus*, si incognita ad duas dimensiones ascendit, ut $xx = ab + cc$; *cubica*, seu *tertii gradus*, si ad tres dimensiones, ut $x^3 = ab^2$, vel $x^3 - ab^2 = 0$; generatim gradus æquationis a maximo gradu; ad quem incognita evehitur, denominatur. Sic æquatio gradus *quarti*, *quinti*, *sexti*, &c. vocatur, si maxima incognitæ potestas hujusmodi gradus exhibeat. Æquatio vero dicitur indeterminata, cum incognita ad gradum indeterminatum attollitur, ut $x^m = a^m + b^m$, quæ fit determinata, si numerum aliquem pro m substituatur, ut $m = 2$, vel $= 3$, vel $= \frac{2}{3}$, &c.

141. Æquatio dicitur *affecta*, cum incognitæ potestas diversos habet dimensionis gradus, ut $x^2 + ax = ab$; $x^3 - ax^2 + bx = bc^2$. Hinc æquationes vocantur *qxad.aticæ affectæ*, *cubicæ affectæ*, &c. Cum vero in-

incognitæ poteſtas eandem ubique ſervat dimenſionem, æquatio *pura* vocatur, ut $ax + bx = cc$; $x^3 = abc$; $axx + bxx = c^3$, &c.

142. Æquationem *reſolvere* idem eſt ac valores incognitæ æquationem ipſam ingredientis per operationes idoneas, de quibus infra, invenire.

143. Unuſquiſque incognitæ valor, *Radix* æquationis appellatur, quæ idcirco pro incognita in æquationem introducta facit ut iſta evaneſcat, quæque ſi habeat ſignum $+$, ut $x = + a$, dicitur *vera*, vel *poſitiva*, vel *affirmativa*; ſi habeat ſignum $-$, ut $x = - b$, vocatur *falſa*, ſeu *negativa*; ſi fuerit $x = a\sqrt{-1}$, aut $x = a + b\sqrt{-1}$, dicitur, ut jam monuimus, *imaginaria*, vel *impoſſibilis*.

144. Ad incognitæ vero valorem venandum æquationem ita tractare oportet, ut ipſa incognita in uno æquationis membro ſola relicta, ceteræ quantitates prorſus cognitæ in altero exiſtant, pro quo Regulæ ſequentes in uſum vocandæ; ſed prius ſit

145. Propoſitio I. *Data qualibet æquatione, ſi eadem in utroque ejus membro mutatio, quæcumque ea ſit, peragatur, non tollitur æqualitas.*

Dem. Quum utrumque æquationis membrum ſit eadem quantitas ſub diverſa tantummodo expreſſione deſignata, res patet.

Corollaria, quæ Axiomata quoque dici poſſunt.

146. Non tollitur æqualitas, ſi utrique æquationis membro addatur, vel ab eo ſubtrahatur quantitas æqualis; ut ſi fuerit æquatio $x = a + b$, non tollitur æqualitas, ſi fiat $x + c = a + b + c$, ſive $x - c = a + b - c$.

147.

147. Non tollitur æqualitas, si ambo æquationis membra per eandem vel æqualem quantitatem multiplicentur, aut dividantur. Sic si fuerit $x = a - b$, multiplicando per c, factum erit $cx = ac - bc$; pariterque si fuerit $cx = ac - bc$, dividendo per c, quotus erit $x = a - b$.

148. Non tollitur æqualitas, si utrumque æquationis membrum ad eandem potestatem elevetur, aut si eadem radix utrinque extrahatur. Sic si fuerit

$x = a + b$, erit etiam $x^m = (a + b)^m$; vel si fuerit $y^m = (a + b)^m$, extracta utrinque radice m, erit etiam $y = a + b$.

149. Non tollitur æqualitas, si omnia signa utrumque æquationis membrum afficientia mutentur. Sic si fuerit $-xx + ax = bc$, æquatio persistit, faciendo $xx - ax = -bc$. Ubi animadvertendum, æquationem

$-x = \frac{b - a}{c}$, mutatis signis, evadere $x = \frac{a - b}{c}$,

non vero $x = \frac{a - b}{-c}$; nam multiplicando $-x =$

$\frac{b - a}{c}$ per c, fit $-cx = b - a$, & mutatis signis, cx

$= a - b$; quare $x = \frac{a - b}{c}$.

150.

150. Prop. II. *Ad incognitam, quæ aliquam æquationem ingreditur, ab adnexis quantitatibus extricandam, operationes iis contrariæ requiruntur, per quas intricata remansit.*

Id per se patet; unde fluunt sequentes

REGULÆ.

151. Quantitas quævis ex uno æquationis membro in alterum, signo mutato, transferri potest, quæ transpositio *Antithesis* dicitur. Sit $x+c=a+b$, erit etiam $x=a+b-c$; nam est $x+c-c=a+b-c$ (146.), seu $x=a+b-c$; eadem ratione si fuerit $x-c=a+b$, erit etiam $x=a+b+c$. Per hanc Regulam æquatio ad nihilum, si lubeat, redigitur. Sic ex $a+b=c-x$ fieri potest $-x+c-a-b=0$, sive accuratius $x+a+b-c=0$, quod nuper dicta (149.) confirmat. Æquales igitur termini in utroque æquationis membro iisdem signis affecti occurrentes deleri utrinque possunt, ex quo expeditior fit operatio, & æquatio simplicior evadit.

152. Si incognita per quantitatem cognitam sit divisa, per hanc tota æquatio multiplicetur. Sit $\frac{xx}{4a}=2b-3c$; ergo $\frac{x^2 . 4a}{4a}=2b . 4a-3c . 4a$ (147.), nimirum $x^2=8ab-12ac$.

153. Si incognita per cognitam sit multiplicata, per hanc tota æquatio dividatur. Sit $ax+bx=ac+dd$, erit

erit $\frac{ax+bx}{a+b} = \frac{ac+dd}{a+b}$, hoc eſt $x = \frac{ac+dd}{a+b}$.

154. Si cognita per incognitam ſit diviſa, per hanc tota æquatio multiplicetur, ut ſi fuerit $a = \frac{bcc}{ax+bx}$, erit $a^2x+abx = \frac{bcc(ax+bx)}{ax+bx}$, nempe $a^2x+abx = bc^2$, ac tandem $x = \frac{bcc}{aa+ab}$ (153.).

155. Si occurrant fractiones, in quibus varios habeat incognita denominatores, fractiones hujuſmodi ad idem nomen reducantur, deinde Regulæ antecedentes, prout opus fuerit, adhibeantur. Eſto $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x}{4} + a = x$; fiet $\frac{12x+8x-6x}{24} + a = x$; hinc $12x+8x-6x+24a = 24x$ (152.), ſive $14x + 24a = 24x$; quare $24a = 24x - 14x$ (151.), ſive $24a = 10x$, ac demum $\frac{24}{10}a = \frac{12}{5}a = x$ (153.).

156. Si occurrat æquatio, cujus omnes termini per eandem quantitatem multiplicentur, aut dividantur, quantitas iſta, ceteris manentibus, deleri poteſt; ut ſi ponatur $ax+ab = ac$; diviſa tota æquatione per a (153.), fiet $x+b = c$. Itidem ſi detur $\frac{x+b}{a} =$

$c+d$

$\frac{c+d}{a}$, omnibus terminis per a multiplicatis (154.), habebitur $x+b=c+d$, atque $x=c+d-b$.

157. Si incognita ſit ſigno radicali involuta, quantitas ſigno radicali affecta ſola in altero æquationis membro per antitheſim relinquatur; deinde ſigno radicali ſublato, membrum alterum ad illam elevetur potentiam, quam ſigni radicalis exponens indicat; ut ſi habeatur $a-\sqrt{aa+yy}=b$, fiat $\sqrt{aa+yy}-a=-b$ (149.), tum $\sqrt{aa+yy}=a-b$ (151.), ac poſtmodum quadrando, $aa+yy=aa-2ab+bb$, factaque reductione, $yy=bb-2ab$. Eſto $\sqrt[3]{aaz-bbz}=c$. Utroque termino ad radicem cubicam evecto, fiet $aaz-bbz=c^3$, & $z=\frac{c^3}{aa-bb}$. Sit præterea $a+\sqrt{ax}=\sqrt{bc}$; ergo $aa+2a\sqrt{ax}+ax=bc$, ſive $2a\sqrt{ax}=bc-ax-aa$; quare iterum quadrando fiet $4a^3x=(bc-ax-aa)^2$. Proponatur denique $(a-b)\sqrt{ax}=(2a-c)\sqrt{a^2+c^2}$; dividendo primum per $a-b$, deinde per $\sqrt{a^2+c^2}$, fiet $\frac{\sqrt{ax}}{\sqrt{a^2+c^2}}=\frac{2a-c}{a-b}$; & quadrando, prodibit $\frac{ax}{a^2+c^2}=$

4aa—

$\frac{4aa - 4ac + cc}{aa - 2ab + bb}$, unde elicitur $x = \frac{(a^2+c^2)(4a^2-4ac+c^2)}{a^3 - 2a^2b + ab^2}$.
Hoc dicitur *Asimetriam* tollere.

158. Si quantitates incognitam involventes potestatem aliquam completam exhibeant, ut quadratum, cubum, &c. hac potestate in altero æquationis membro sola relicta, ex utroque membro radix extrahatur; ut si detur $xx = a^2 - 2ab + b^2$, extracta radice quadrata, erit $x = a - b$, vel $x = b - a$ (136.). Similiter si detur $x^2 + ax + \frac{1}{4}aa + cc = b^2$, erit $x^2 + ax + \frac{1}{4}a^2 = b^2 - c^2$ (151.); quare $x + \frac{1}{2}a = \pm\sqrt{bb - cc}$ (148.), vel $x = \pm\sqrt{bb - cc} - \frac{1}{2}a$.

159. Incognitæ quantitati in alterutro æquationis membro existenti alia æquivalens subrogari potest; ut si fuerit $x^2 - y^2 = bc$, ponaturque $y = a - x$, erit $yy = a^2 - 2ax + x^2$, quo valore suffecto, fit $xx - aa + 2ax - xx$, sive $2ax - aa = bc$, unde $2ax = bc + aa$, ac demum $x = \frac{bc + aa}{2a}$. Id vocatur *substituere*; quod in universa Analysi perpetuum, eximiumque habet usum.

160. Regulæ istæ locum etiam habent, cum quantitates inæquales invicem comparantur, inter quas

quas signum $>$, vel $<$ intercedit. Itaque si fuerit $\frac{ax}{c} - f < \frac{bd}{a}$, erit $\frac{ax}{c} < f + \frac{bd}{a}$ (151.); deinde $ax < cf + \frac{bcd}{a}$ (152.); tum $x < \frac{cf}{a} + \frac{bcd}{aa}$ (153.). Item si habeatur $ax^2 + bc^2 > b^3$, erit $x^2 > \frac{b^3 - bc^2}{a}$ (151.), deinde $x > \pm \sqrt{\frac{b^3 - bc^2}{a}}$ (158.). Verum si fuerit $-x > \frac{ab}{c} - f$, & signa sint mutanda, signum quoque intermedium comparationis mutari debet, ut evadat $x < f - \frac{ab}{c}$.

161. *Scholion.* Occasio hic obvenit ostendendi, quomodo elicita ex duobus quadratis radice, radix unius stet semper positiva, alterius vero duplicem habeat valorem. Pro quo sumptis duobus quadratis æqualibus xx, aa, quum quadratum quodlibet duas habeat radices, positivam alteram, alteram negativam (23. n. 6.), si ex æquationis $xx = aa$ utroque membro extrahantur radices tam positivæ, quam negativæ; ac deinde in æquationes possibiles combinentur, prodibit 1.° $x = a$; 2.° $-x = -a$; 3.° $x = -a$; 4.° $-x = a$; at prima æquatio est eadem cum secunda (149.), pariterque tertia cum quarta, quæ a pri-

prima & ſecunda differunt; ergo quatuor iſtæ æquationes ad duas tantum reducuntur, videlicet $a = x$, $a = -x$, ſeu, quia valores incognitæ x quæruntur, $x = a$, $x = -a$, aut conjunctim $x = \pm a$. Signum $\pm$ *ambiguum* appellatur.

CAPUT II.

DE RATIONIBUS, PROPORTIONIBUS, ET PROGRESSIONIBUS

Definitiones.

162. Ratio eſt duarum homogenearum quantitatum comparatio, quæ duplex eſt, *Arithmetica*, & *Geometrica*.

163. *Ratio Arithmetica* dicitur comparatio duarum quantitatum homogenearum quoad earum differentiam, ſive quoad exceſſum aut defectum. Sic quantitatum 8, & 15 differentia eſt 7, eſt enim $8 < 15$ defectu 7, & $15 > 8$ exceſſu 7. Ratio arithmetica ſic exprimi poteſt $a \overset{d}{,} b$, ſive $8 \overset{7}{,} 15$, vel $a \overset{d}{-} b$.

164. *Coroll.* 1. Ergo in hac ratione ſumma ex termino minore & differentia dat terminum majorem; ut ſi fuerit $a \overset{d}{,} b$, vel $5 \overset{3}{,} 8$, erit $b + d = a$, $5 + 3 = 8$. Contra reſiduum ex termino majore, & differentia dat terminum minorem, nempe $a - d = b$, vel $8 - 3 = 5$.

165.

165. *Coroll.* 2. Expreſſio a, $a \pm d$, vel conſimilis, rationem arithmeticam quamcumque deſignat.

166. *Ratio Geometrica* eſt duarum homogenearum quantitatum comparatio, per quam conſideramus, quoties harum quantitatum altera vel alteram continet, vel in ipſa continetur; ut ſi conſideremus quoties 8 continetur in 24, vel quoties 24 continet 8; vel quoties quantitas aliqua aliam ſuperat, aut contra, quod eodem recidit. Quantitatum comparatarum prima *antecedens*, altera *conſequens* dicuntur. Ratio autem geometrica ſic exprimitur; $a \overset{m}{:} b$, ſive $8 \overset{3}{:} 24$, quotum ſupra duo puncta quantitatibus comparatis interpoſita collocando.

167. Quotus iſte *Denominator*, vel *Nomen*, vel *Exponens* rationis Geometricæ appellatur; eſt enim numerus indicans, quoties antecedens rationis continet conſequentem, vel in eo continetur; ſeu, quod idem eſt, *denominator* rationis geometricæ eſt quotus ex diviſione antecedentis per conſequentem emergens; quare denominator iſte erit ad unitatem, ut antecedens ad conſequentem (25. n. 2.).

168. *Coroll.* 1. Liquet igitur, rationem geometricam exprimi etiam poſſe per fractionem; ex. gr. $a:b$ per $\frac{a}{b}$, & $8:24$ per $\frac{24}{8}$, & viciſſim, ut jam obiter innuimus (11.).

169. *Coroll.* 2. Itaque ſi per exponentem rationis geometricæ minor terminus multiplicetur, major prodit; ut ſi duorum terminorum a, b minor ſit b,

 erit

erit $b \times \frac{a}{b} = a$, & $8 \times \frac{24}{8} = 24$; hinc si n sit exponens rationis, & terminus minor a, major erit na. Vicissim si terminus major sit a, & exponens rationis n, minor erit $\frac{a}{n}$; quare $a : na$ exprimit rationem minoris inæqualitatis, & $a : \frac{a}{n}$ rationem majoris; generatim vero sumendo m pro numero quovis integro vel fracto, $a : ma$, vel $ma : a$ rationem geometricam quamcumque designabit.

170. Rationes sunt *æquales*, vel *majores*, vel *minores* comparate ad rationum differentias, ut in ratione arithmetica, vel ad rationum exponentes, ut in geometrica; ex. gr. quoad arithmeticam $4 \overset{3}{,} 7$, & $3 \overset{3}{,} 6$ sunt æquales, sed $4 \overset{3}{,} 7 > 6 \overset{2}{,} 8$, & $4 \overset{3}{,} 7 < 5 \overset{4}{,} 9$. Quoad geometricam $a \overset{m}{:} b$, $c \overset{m}{:} d$, sive $4 \overset{2}{:} 2$, $6 \overset{2}{:} 3$ sunt æquales, sed $6 \overset{3}{:} 2 > 8 \overset{2}{:} 4$, & $4 \overset{2}{.} 2 < 9 \overset{3}{:} 3$.

171. *Proportio* generatim est duarum rationum æqualitas; speciatim vero *proportio arithmetica* est duarum rationum eandem differentiam habentium continuatio, ex. gr. $a \overset{d}{,} b \,{\cdot}{\cdot}{\cdot}\, c \overset{d}{,} f$. *Proportio geometrica*, quæ etiam dicitur *analogia*, est duarum rationum eun-

eundem denominatorem vel exponentem rationis habentium consecutio. Utrasque (sic coacti) sub initium (11. 12.) attigimus.

172. *Proportio continua* dicitur, cum consequens primæ rationis est antecedens secundæ; secus *discreta.*

173. *Ratio composita* est producti, quod oritur invicem multiplicando antecedentes duarum, vel plurium rationum simplicium cujuscunque generis, comparatio cum producto, quod invicem multiplicando earundem rationum consequentes emergit; ex. gr. si dentur duæ rationes simplices etiam inæquales $a:b$, $c:d$, ratio composita istarum rationum dicitur $ac:bd$; quum enim istæ duæ rationes exprimantur etiam per $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, patet fore multiplicatas, si fiat $ac:bd$; quod de pluribus etiam rationibus intelligatur. In specie autem vocatur ratio *duplicata*, si duabus, *triplicata* si tribus, & ita porro, rationibus similibus invicem ductis componatur, denominatione a rationum multiplicatarum numero mutuata. Contra ratio *subduplicata*, *subtriplicata*, &c. vocatur illa, quam habent radices ad suas potentias.

174. *Progressio*, vel *series* arithmetica, aut geometrica, est consecutio terminorum in proportione continua arithmeticè, vel geometricè progredientium.

175. Propositio I. *In omni proportione arithmetica summa terminorum extremorum æqualis est summæ mediorum, aut medii duplo, si proportio sit continua.*

Dem. Sit proportio $a, b \cdot\cdot f, g$; ajo, esse $a+g = b+f$. Hæc enim proportio sic exprimi potest

 a,

$a, a \pm d \cdot \cdot f, f \pm d$ (165.); ergo extremorum ſumma $a + f \pm d = a + f \pm d$ ſummæ mediorum; *quod erat primum.*

Sit proportio continua $a, b \cdot \cdot b, f$, quæ ſic etiam exprimitur, $\div a, b, f$; dico, eſſe $a + f = 2b$. Quum enim iſta proportio ſic quoque deſignari poſſit, $\div a$, $a \pm d, a \pm 2d$; patet, eſſe $2a \pm 2d = 2a \pm 2d$; *quod erat ſecundum.*

176. *Coroll.* Datis igitur tribus in proportione arithmetica diſcreta, vel duobus in continua terminis, reliquus facile invenitur; hoc enim poſito $= x$, erit $a, b \cdot \cdot c, x$, vel $a, b \cdot \cdot b, x$; ubi in primo caſu $a + x = b + c$, adeoque $x = b + c - a$; in ſecundo $a + x = 2b$, adeoque $x = 2b - a$. Quod ſi proportio fuerit continua, ac terminus quæſitus medius arithmeticè proportionalis, erit $a, x \cdot \cdot x, b$; quare $2x = a + b$, & $x = \frac{a+b}{2}$.

177. Propoſitio II. *In progreſſione quavis arithmetica ſumma terminorum extremorum eſt æqualis ſummæ duorum quorumlibet mediorum ab extremis æquidiſtantium, aut medii duplo, ſi terminorum numerus ſit impar.*

Dem. Primi progreſſionis termini ſint $a, a \pm d, a \pm 2d, a \pm 3d$, &c. & ultimus terminus ſiat $= x$, penultimus erit $= x \mp d$, quilibet enim ſemper deficit ab antecedente, vel eundem excedit differentia d, adeo-

adeoque antepenultimus erit $= x \mp 2d$, & sic deinceps; collocetur itaque ultimus x sub primo a, itidemque illi, qui ab ultimo distant, subscribantur iis, qui pari intervallo distant a primo, ac fiet

$$\begin{array}{lllll} a, & a\pm d, & a\pm 2d, & a\pm 3d, & a\pm 4d \\ x, & x\mp d, & x\mp 2d, & x\mp 3d, & x\mp 4d \\ \hline \end{array}$$

Summa $a+x, a+x, a+x, a+x, a+x$; *quod erat primum.*

Nunc autem modo sequenti, quod eodem recidit, termini ordinentur

$$\begin{array}{lllll} a, & a\pm d, & a\pm 2d, & a\pm 3d, & a\pm 4d \\ & a\pm 3d, & a\pm 2d, & & a \\ \hline & 2a\pm 4d, & 2a\pm 4d, & & 2a\pm 4d \end{array}$$

; *quod erat secundum.*

178. *Coroll.* 1. In prima progressione, quæ quinque constat terminis, ultimus terminus est $a\pm 4d$, seu $a\pm(5-1)d$; quartus terminus est $a\pm(4-1)d$, & si progressio usque ad centum terminos producatur, ultimus terminus erit $a\pm(100-1)d$; quare generatim datis in progressione quavis arithmetica primo termino a, differentia d, & terminorum numero n, habetur ultimus terminus $z = a\pm(n-1)d$, (in signo ambiguo $\pm$ signum affirmativum inservit progressioni crescenti, negativum decrescenti); ubi dignoscitur, quod si tres ex quatuor hisce quantitatibus innotescant, etiam quarta fiet cognita, nimirum

1. $z = a\pm(n-1)d$; 2. $a = z\mp(n-1)d$; 3. $d = \pm\frac{(z-a)}{n-1}$ 4. $n = \pm\frac{(z-a)}{d}+1$.

179. *Coroll.* 2. Si primus terminus sit a, ultimus x, numerus terminorum n, summa progressionis erit $\frac{n}{2}(a+x)$, videlicet *summa progressionis cujuslibet arithmeticæ habetur, si aggregatum primi & ultimi termini ductum in terminorum numerum bifariam dividatur.* Id ex sola inspectione summæ duarum priorum progressionum illico apparet, ibi enim progressionis termini sunt decem, & summa continet quinque $a+x$. Quapropter 1.° si n sit numerus immanis, summa erit immanis, nempe $\infty\frac{(a+x)}{2}$; 2.° Si x sit immanis, summa evadet $\frac{nx}{2}$, evanescente a comparate ad x; 3.° Si progressio decrescat, ut x sit immane parvus, summa fiet $\frac{1}{2}an$, evanescente x. 4.° Si primus terminus a, differentia d, & terminorum numerus n tantummodo innotescant, quum sit $x=a\pm(n-1)d$ (178.) summa progressionis erit generatim $=na\pm\frac{n(n-1)d}{2}=\frac{2na\pm n(n-1)d}{2}$; adeoque si quis scire aveat summam numerorum naturalium ab unitate usque ad n; quum primus terminus sit $=1$, si ultimus ponatur $=n$, erit quoque terminorum numerus $=n$; summa igitur quæ-

quæsita erit $\frac{nn+n}{2}$; si vero expetatur summa progressionis 1, 3, 5, 7, &c. usque ad terminorum numerum n continuatæ, quoniam primus terminus $=1$, differentia $=2$, terminorum numerus $=n$, summa quæsita erit $=nn$; &c.

180. Propositio III. *In quavis proportione geometrica extremorum productum est æquale producto mediorum, vel medii quadrato, si tres sint termini.*

Dem. Quælibet proportio geometrica sic exprimi potest, $a:ma=b:mb$; vel sic $\div a, ma, m^2a$ (169.); sed $a \times mb = ma \times b$ in prima, & $a \times m^2a = m^2 \times a^2$ in secunda; ergo &c.

181. *Coroll.* Datis igitur tribus in proportione geometrica discreta terminis, vel duobus in continua, reliquus facile habetur; hoc enim posito $=x$, erit $a:b=c:x$, vel $a:b=b:x$, quare in primo casu $ax=bc$, & $x=\frac{bc}{a}$; in secundo $ax=bb$, & $x=\frac{bb}{a}$. Quod si proportio fuerit continua, ac terminus quæsitus medius proportionalis, erit $a:x=x:b$, adeoque $x^2=ab$, & $x=\pm\sqrt{ab}$; ergo datis duobus terminis, etiam medius proportionalis geometricus facile invenitur.

182. Propositio IV. *Si productum duorum extremo-*

morum ex quatuor terminis datis sit æquale producto mediorum, factores erunt reciproce proportionales.

Dem. Producta æqualia sint ad, bc; divide primo per b, deinde per d; fiet $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; ex quo eruitur $a:b = c:d$ (168.); ergo &c.

183. *Coroll.* Quæcumque igitur æquatio resolvi potest in analogiam, eamque variam; ut si detur $abc = fgb$, analogiæ hinc prodeuntes erunt $ab:fg = b:c$; $a:f = gb:bc$; $b:g = fb:ac$, &c. Hæc resolutio insignem habet usum in Theorematibus inveniendis.

184. Propositio V. *In qualibet progressione geometrica extremorum productum est æquale producto intermediorum ab extremis æquidistantium, vel æquale quadrato medii, si terminorum numerus sit impar.*

Dem. Sit primus terminus $= a$, denominator $= m$; facta progressione habetur

$$\frac{\begin{array}{c} a, ma, m^2a, m^3a, m^4a, m^5a \\ m^4a \qquad m^2a \qquad a \end{array}}{m^5a^2 = m^5a^2 = m^5a^2}; \text{ sive } \frac{\begin{array}{c} a, ma, m^2a, m^3a, m^4a \\ m^3a, m^2a, \qquad a \end{array}}{m^4a^2 = m^4a^2 = m^4a^2};$$

quod erat &c.

185. Propositio VI. *Si duæ occurrant rationes eundem denominatorem exhibentes, vel si obveniat æquatio quælibet; semper formari poterit proportio geometrica, seu analogia.*

Dem. Utrumque patet ex dictis (171. 182.).

Corollarium generale.

186. Hinc tota Geometriæ dimanat Medulla, seu Dialectica, quæ sequentia complectitur Theoremata.

I.

I. Analogiæ cujuslibet termini varie commutari possunt, ac tamen geometrice proportionales persistere.

Detur $a : b = c : d$; erit

Dividendo	$a-b : b = c-d : d$	Alternando	$a:c = b:d$
Componendo	$a+b : b = c+d : d$	Commutando	$c:d = a:b$
Convertendo	$a : a-b = c : c-d$	Invertendo	$b:a = d:c$
Mixtim	$a+b : a-b = c+d : c-d$	Rursus	$d:c = b:a$
Rursus	$a+c : b+d = a : b$	Rursus	$c:a = d:b$
Rursus	$a-c : b-d = a : b$	Rursus	$d:b = c:a$,
		&c.	

Generatim $pa+qb : ra+fb = pc+qd : rc+fd$; quæ analogiæ iterum *alternando*, *invertendo*, *convertendo*, *componendo*, *dividendo* &c. possunt multimodis permutari, dummodo denominator rationis idem in singulis rationibus semper emergat; quod facile dignoscetur, si pro speciebus b, d substituantur æquivalentes ma, mc, sive pro a, c sufficiantur mb, md.

II. Duæ quantitates eandem ad tertiam habentes rationem, sunt æquales, & vicissim; nempe si fuerit $a:c = b:c$, erit $ac = bc$, adeoque $a = b$ (156.).

III. Quæ sunt proportionalia uni tertio, sunt quoque proportionalia inter se; ut si fuerit $\left.\begin{matrix} a:b \\ f:g \end{matrix}\right\} = c:d$, erit etiam $a:b = f:g$; idem enim adest ubique denominator rationis.

IV. Simpla sunt æque multiplis, aut submultiplis proportionalia; videlicet $a:b = ma:mb$, aut $a:b = \frac{a}{m} : \frac{b}{m}$, quicumque numerus sit m.

V. Duæ fractiones ejusdem numeratoris se habent re-

reciproce ut denominatores; hoc eſt $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = c : b$, ſive $\frac{1}{b} : \frac{1}{c} = c : b$; quare analogia $a : b = c : d$, ſic etiam exprimi poteſt, $a : b = \frac{1}{d} : \frac{1}{c}$.

VI. Si duobus Totis adiiciantur, vel ab iiſdem ſubtrahantur duæ quantitates ipſis proportionales, ſummæ vel differentiæ erunt quoque dictis Totis proportionales. Sic ſi fuerit $a : b = c : d$, erit etiam $a : b = a \pm c : b \pm d$; eſt enim $ab \pm ad = ab \pm bc$ (180.); ſed $ad = bc$; ergo $ab \pm bc = ab \pm bc$, quod allatam analogiam indubiam reddit. Idem etiam per æquales denominatores rationis demonſtratur.

VII. Si duarum proportionum termini *homologi* (nempe antecedentes, vel conſequentes) multiplicentur, aut dividantur; tam producta, quam quoti analogiam ſemper conſtituent. Sint ex. gr. duæ analogiæ $a : ma = b : mb$, terminorum homologorum
$c : nc = d : nd$

producta ſunt $ac : mnac = bd : mnbd$, quoti $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{nd}$; ubi extremorum productum facto mediorum eſt æquale, vel denominatores æquales emergunt.

VIII.

VIII. Quantitatum analogiam efficientium tam potentiæ quam radices ejusdem generis semper & ipsæ analogiam efformant. Etenim si detur $a : ma = b : mb$, erit $a^{\frac{r}{n}} : m^{\frac{r}{n}} a^{\frac{r}{n}} = b^{\frac{r}{n}} : m^{\frac{r}{n}} b^{\frac{r}{n}}$, quòd denominatores prodeunt æquales.

IX. Si in duabus analogiis primi antecedentes, & ultimi consequentes, ac vicissim, nec non utrique antecedentes vel utrique consequentes sint æquales; erunt reliqui termini in primo casu reciprocè, in secundo directè proportionales. Sint ex. gr. quatuor analogiarum paria

$\left\{\begin{matrix} a:b=c:d \\ a:f=g:d \end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} a:b=c:g \\ f:b=c:d \end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} a:b=c:d \\ a:f=c:g \end{matrix}\right\}$ $\left\{\begin{matrix} b:a=d:c \\ f:a=g:c \end{matrix}\right\}$

dico, in duabus primis analogiis esse $b:f=g:c$; in secundis $a:f=d:g$; in tertiis, & quartis $b:f=d:g$.. Etenim in duabus primis habetur $\left.\begin{matrix} bc \\ fg \end{matrix}\right\} = ad$, adeoque $bc = fg$ [*per num.* II.]; unde $b:f=g:c$. Pari ratione in secundis obtinetur $ag = fd$; hinc $a:f=d:g$. In tertiis & quartis alternando & invertendo fit $\begin{matrix} a:c=b:d \\ a:c=f:g \end{matrix}$, quare [*per num.* III.] $b:d=f:g$; atque iterum alternando, $b:f=d:g$.

X. Si in duabus analogiis antecedentes unius sint respectivè æquales consequentibus alterius; consequentes primæ analogiæ, & antecedentes secundæ erunt respectivè proportionales *ex æquo ordinate*. Ut si proponantur duæ analogiæ $\left\{\begin{matrix} a:b=c:d \\ f:a=g:c \end{matrix}\right\}$, dico, fore $b:f=d:g$; alternando enim & invertendo, fit

(b:

$\left\{\begin{matrix} b:d \\ f:g \end{matrix}\right\} = a:c$; ergo $b:d = f:g$, & rurſus alternando, $b:f = d:g$.

XI. Si in duabus analogiis duo termini extremi unius ſint duobus mediis alterius reſpective æquales, termini medii prioris analogiæ erunt extremis ſecundæ reſpective proportionales *ex æquo perturbate*. Sit ex. gr. $\left.\begin{matrix} (1.^a)\ a:b = c:d \\ (2.^a)\ f:a = d:g \end{matrix}\right\}$, dico, fore $b:f = g:c$; nam in prima $ad = bc$, in ſecunda $ad = fg$, ergo $bc = fg$; ex quo $b:f = g:c$.

XII. Series $m^0, m^1, m^2, m^3, m^4, m^5$, &c. $m^0 a, m^1 a, m^2 a, m^3 a, m^4 a$, &c. ceteræque omnes, in quibus bini termini eundem habent denominatorem rationis m integrum vel fractum, poſitivum aut negativum, ſunt progreſſiones geometricæ. Hiſce adnumeranda eſt ſeries $a^{0m}, a^{1m}, a^{2m}, a^{3m}, a^{4m}$, &c. ubi poteſtates perfectæ vel imperfectæ gradatim creſcunt. Si vero ſeriem generalem $m^0 a$, $m^1 a$, $m^2 a$, $m^3 a$, $m^4 a$, &c. contemplemur, ſtatim conſtabit, denominatorem m, qui unitate in ſuo exponente poſt primum terminum gradatim augetur, tot unitates acquirere, quot ſunt termini præeuntes, adeoque ſextus ex. gr. terminus erit am^{6-1}; quare generatim ſi terminorum præeuntium numerus vocetur n, valor cujuſcumque termini t in progreſſione geometrica continua incipiente ab unitate erit $t = am^{n-1}$.

XIII.

XIII. Summæ vel differentiæ inter progressionis cujuslibet geometricæ terminos contiguos binos, ternos, quaternos, &c. in progressione continua vel discreta similiter sumptos sunt & ipsæ in geometrica proportione; ex. gr. $a \pm am$, $am \pm am^2$, $am^2 \pm am^3$; $a \pm am \pm am^2$, $am \pm am^2 \pm am^3$, $am^2 \pm am^3 \pm am^4$; &c. & sic deinceps, multiplicando primum terminum progressionis per m, vel per m^2, vel per m^3, &c. & similiter in productis successive nascentibus continuando.

XIV. In quavis progressione geometrica continua primus terminus est ad tertium in ratione duplicata; ad quartum triplicata; ad quintum quadruplicata; & sic deinceps in ratione tantuplicata, quantus est terminorum numerus uno dempto. Quum enim ista progressio sit $a, b, \frac{b^2}{a}, \frac{b^3}{a^2}, \frac{b^4}{a^3} \ldots\ldots \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}}$; erit $a : \frac{b^2}{a} = a^2 : b^2$; $a : \frac{b^3}{a^2} = a^3 : b^3$; $a : \frac{b^4}{a^3} = a^4 : b^4$; generatim vero $a : \frac{b^{n-1}}{a^{n-2}} = a^{n-1} : b^{n-1}$, posito terminorum omnium numero $= n$.

XV. Si fuerint quicumque termini proportionales, summa omnium antecedentium erit ad summam omnium consequentium, ut quilibet antecedens ad suum consequentem. Sit ex. gr. $a : ma = b : mb =$

$c:mc = d:md$; ajo, esse $a+b+c+d : ma+mb+mc+md = c:mc$; quod si termini efficiant progressionem a, ma, m^2a, m^3a, &c. dico, esse $a+m^1a+m^2a+m^3a : m^1a+m^2a+m^3a+m^4a = a:ma$; quod uno intuitu verum esse dignoscitur, adest enim ubique idem denominator m. Hinc quæ sequuntur.

XVI. Datis quibuslibet terminis in progressione $m^0a, m^1a, m^2a, m^3a, m^4a$, &c. summa omnium præter ultimum erit ad summam omnium præter primum, ut primus ad secundum, sive ut unitas ad denominatorem rationis (167.), quod ex ultimæ analogiæ inspectione fit manifestum. Unde progressionum geometricarum summæ nullo negotio eliciuntur. Etenim si statuamus primum terminum $=a$, secundum $=b$, ultimum $=t$, summam omnium $=f$, erit $f-t : f-a = a:b$, seu dividendo, $a-t : f-a = a-b : b$,

ex quo eruitur $f = \frac{(a-t)b}{a-b} + a$, hoc est $f =$

$\frac{aa-bt}{a-b}$, vel $f = \frac{bt-aa}{b-a}$; primus nempe Canon

cum primus terminus est major secundo, alter cum minor. *Datis igitur primo, secundo, atque ultimo progressionis geometricæ termino, terminorum omnium summa obtinetur.*

Quin etiam posito denominatore rationis $=m$,

quoniam $f-t : f-a = 1:m$, habetur $m = \frac{f-a}{f-t}$,

vi-

videlicet *datis summa, primo, atque ultimo termino progressionis alicujus geometricæ, progressio concinnari potest.*

Sed sic etiam valor f obtinetur. Quoniam $m^1a + m^2a + m^3a + m^4a = f - a = (a + m^1a + m^2a + m^3a)\,m = (f - t)\,m$, ut patet, & sic semper; si quantum libuerit progressio continuetur; erit $f - a = (f - t)\,m$;

ex quo elicitur $f = \frac{tm - a}{m - 1}$; videlicet *datis primo termino a, ultimo t, & denominatore rationis m, habetur summa f.* Hinc $m = \frac{f - a}{f - t}$.

Vel sic. Ob $t = am^{n-1}$ (n. XII.), substituendo; fit $f = \frac{am \times m^{n-1} - a}{m - 1} = \frac{am^n - a}{m - 1}$; nimirum *datis termino primo a, terminorum numero n, & denominatore rationis m, invenitur summa f.*

XVII. Quod si progressionem infinitum versus imaginemur succrescere, ultimus terminus (si ponamus seriem abrumpi in aliquo loco ab ejusdem principio immane distanti) erit immanis; quare in nuper allato Canone $f = \frac{bt - aa}{b - a}$ terminus aa comparate ad bt evanescet, & Canon in hac hypothesi fiet $f = \frac{bt}{b - a}$. Si vero concipiamus, progressionem

in-

infinitum versus decrescere, tunc ultimus terminus pro immane parvo, sive pro nihilo, ratione habita ad primum & secundum, accipi potest, proinde bt evanescet & Canon $s = \frac{aa - bt}{a - b}$ evadet $s = \frac{aa}{a - b}$; nempe *summa omnium terminorum est æqualis primi termini quadrato per secundi a primo differentiam diviso.*

XVIII. Quoniam datis a, m, n, habetur $t = am^{n-1}$ (n. XII.), datis a, t, n, invenietur $m = \sqrt[n-1]{\frac{t}{a}}$, datisque m, n, t, obtinebitur $a = \frac{t}{m^{n-1}}$; at si dentur a, m, t, multiplicando $t = am^{n-1}$ per $\frac{m}{a}$, fit $\frac{tm}{a} = m^n$; ut igitur habeatur n, attollere oportet m ad potestatem primam, secundam, tertiam &c. donec reperiatur numerus $= \frac{tm}{a}$, cujus potentiæ index erit valor quantitatis n. Hac tamen methodo, quæ procedit tentando, exactior est illa directa, quam exhibet logarithmorum doctrina, de qua infra. Præterea quoniam datis s, t, a, habetur $m = \frac{s - a}{s - t}$ (n. XVI.)

(n. XVI.) datis a, m, t, invenitur $f = \frac{mt - 1}{m - 1}$; datis m, f, t, invenitur $a = (1 - m) f + mt$; datisque a, m, f, invenitur $t = \frac{a + f(m - 1)}{m}$. Quod si datis m, n, f, omnes quæsitæ progressionis termini sint indagandi, expedit sumere ad arbitrium progressionem aliquam p, mp, m^2p, m^3p, &c.; quum autem in duabus ejusdem nominis progressionibus eodem terminorum numero præditis primæ summa sit ad alterius summam, ut primæ terminus primus ad secundum alterius, posita primæ summa $= s$, erit $s : f = p : q$; quo quarto termino reperto, progressio quæsita erit q, mq, m^2q, m^3q, &c.: usque ad terminorum numerum n. &c.

XIX. Inter a, & b datæ progressionis inserendus esto numerus n mediorum proportionalium. Quoniam pro uno medio x duo inter a & b intercedunt intervalla, nimirum ax, xb; pro duobus mediis x, y tria, nempe ax, xy, yb; & sic prosequendo; intervalla pro mediis, quorum numerus n, erit generatim $n + 1$. Jam vero terminorum omnium progressionem constantium indices ponantur assurgere ad eandem potestatem $n + 1$, erit primus terminus a^{n+1}, tertius $a^n b$ (n. XII.); quare quum ratio primi ad tertium sit duplicata primi ad secundum (n.XIV.), fiet $a^{2n+2} : a^{2n}b^2 = a^{n+1} : x^{n+1} = a^{n-1}b^2$; ergo

$x =$

$x = \sqrt[n+1]{a^{n-1}b^2}$ pro primo medio. Pro secundo fiet, $a^{3+3n} : a^{3n}b^3 = a^{n+1} : x^{n+1} = a^{n-2}b^3$, erit $x = \sqrt[n+1]{a^{n-2}b^3}$; & sic de ceteris, donec index quantitatis b evadat $= n + 1$, quia tunc fiet $\sqrt[n+1]{a^0 \times b^{n+1}} = b$.

Generatim ratio multiplicata primi ad secundum exprimatur per r; erit $a^{rn+r} : a^{rn}b^r = a^{n+1} : x^{n+1} = a^{n+1-r}b^r$; quare $x = \sqrt[n+1]{a^{n+1-r}b^r}$, hinc pro quarto termino si ponatur $r = 4$, fiet $x = \sqrt[n+1]{a^{n-3}b^4}$, &c.

XX. Plura, quæ hoc Corollario generali continentur, transferri quoque possunt ad terminorum per signa interjecta $>$ & $<$ comparationes, ut ex dictis (160., 170.) ostendi facile potest, dummodo Propositiones III. & IV. (180. 182.) comparationibus hisce rite applicentur. Si enim fuerit $ma : a > nb : b$, aut $a : ma < b : nb$, erit $m > n$, adeoque $mab > nab$, & $nab < mab$; vicissim si $mab > nab$, vel $nab < mab$, erit $m > n$, quare $ma : a > nb : b$, & $a : ma < b : nb$. Hinc plura Theoremata, videlicet, si $a : b > c : d$, etiam *alternando*, *componendo*, & *dividendo*, prima ratio

tio

tio major erit secunda, & contra si $a:b<c:d$. Excipio casum, in quo agitur *convertendo*; ut si detur $a:ma>b:nb$, convertendo, signum $>$ mutari debet in oppositum $<$, hoc est $a:a-ma<b:b-nb$; quod statim dignoscitur, multiplicando in utraque comparatione media, & extrema; quum enim in prima sit $nab>mab$, in secunda recte habetur $ab-nab<ab-mab$. Casum consimilem cum agitur *invertendo*, non commemoro, quia per se patet. Interea ex conversione rationis sequens descendit Theorema. *Si totum ad totum minorem habuerit rationem, quam ablatum ad ablatum, totum ad totum majorem rationem habebit quam reliquum ad reliquum.* Cetera Theoremata huc pertinentia facile per hanc methodum demonstrantur.

187. Propositio VII. *Exponens rationis compositæ est productum, quod fit, multiplicando inter se omnes exponentes rationum simplicium datam rationem compositam efficientium.*

Dem. Rationes simplices sint $\overset{m}{a}:b, \overset{n}{c}:d, \overset{r}{e}:f$; dico, rationis compositæ $ace:bdf$ exponentem esse mnr. Hujusmodi enim rationes sic etiam exprimuntur; $mb:b, nd:d, rf:f$; ergo ratio ex istis composita erit

$$mnrbdf:bdf\ (173.),\ \text{sive}\ \frac{mnrbdf}{bdf}=mnr;$$ sed mnr est exponens dictæ rationis compositæ (167.); ergo &c.

188. *Coroll.* 1. Si ratio sit composita ex rationibus æqualibus, seu eundem exponentem habentibus,

 qua-

quarum numerus n, harum exponens erit m^{n}. Ut si fuerint duæ rationes æquales $\overset{m}{a:b}$, $\overset{m}{c:d}$, erit $n = 2$, & ratio ex his composita $ac:bd$ habebit exponentem m^{2}; quod indicat, antecedentem ac esse ad suum consequentem bd in ratione duplicata antecedentis simplicis a ad suum consequentem b, seu c ad d, videlicet (quoniam ob $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, fit $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{aa}{bb} = \frac{cc}{dd}$) ut $aa:bb$, vel $cc:dd$. Sic si fuerint tres rationes æquales $\overset{m}{a:b}$, $\overset{m}{c:d}$, $\overset{m}{f:g}$, ratio ex his composita $acf:bdg$ habebit exponentem m^{3} designantem, esse antecedentem acf ad suum consequentem bdg in ratione triplicata antecedentis simplicis a ad suum consequentem b, quod pari modo demonstratur; & sic de ceteris. Quare generatim datis a, b, erit $a^{\frac{m}{n}} : b^{\frac{m}{n}}$ in ratione tantuplicata ipsarum a, b, quantum exprimit numerus $\frac{m}{n}$, sive in ratione $\frac{m}{n}$ plicata (ut loquuntur) ipsarum a, b (173.). Sic si ponatur $n = 1$, $m = 2$, ratio quadratorum erit duplicata, si $m = 3$, ratio cuborum triplicata &c. suarum radicum. Contra si $m = 1$, $n = 2$, radices erunt in ratione subduplicata, si $n = 3$, subtriplicata &c. suorum quadratorum, cuborum &c. Sic $\frac{a^{2}}{b^{2}} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$; $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} \times \frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{b}$, &c.

189.

189. *Coroll.* 2. Si fuerint quantitates quælibet a, b, c, d, f; erit ratio $a:f$ composita ex rationibus intermediis $a:b$, $b:c$, $c:d$, $d:f$. Id statim ex eo perspicitur, quod ratio composita ex istis rationibus intermediis est $abcd:bcdf$; sed $abcd:bcdf = a:f$; ergo &c.

190. *Scholion* I. Hoc secundum Corollarium insignem habet usum non in Geometricis tantum, ac Philosophicis, sed etiam in Œconomicis, cum agitur de rebus quibuscumque inter se comparandis, ut sunt merces, pondera, reditus, monetæ &c. Sit enim ut Res A ad Rem B; ita p ad q. Item Res R ad Rem S, ut r ad f; fiat $R:S = B:C$, eritque $B:C = r:f$. Has species colloca seorsum in Tabella, & sic prosequere quoadusque libuerit; tum hujusmodi rationes per literas majusculas expressas unam infra aliam subscribe, ipsisque singulæ rationes respective æquales per minusculas designatæ e regione respondeant, ut in paradigmate; habebis $A:D = prt:qfv$, & $E:A = qfvy:prtx$; propterea si $p = 1$, $q = 2$, $r = 3$, $f = 5$, $t = 5$, $v = 6$, $x = 7$, $y = 8$, erit $A:D = 15:60 = 1:4$, & $E:A = 480:105 = 96:21$. &c.

$A:B = p:q$	
$B:C = r:f$	
$C:D = t:v$	
$D:E = x:y$	
&c.	&c.

191. *Scholion* II. Quid quod idem hoc Corollarium Regulæ aureæ compositæ generalius demonstrandæ inservit; quod per transennam exponere non nisi utile censeo. Duo autem principia, quæ ob eorum perspicuitatem instar Axiomatum haberi possunt, quibusque demonstrationis fundamentum innititur, sunt præmittenda, nimirum

1. *Causarum ejusdem generis* C, c, *eodem tempore, vel æqualibus temporibus uniformiter agentium effectus* E, ε *sunt causis ipsis proportionales.*

2. *Causarum æqualium uniformiter agentium effectus* ε, e *sunt ut tempora* T, t.

Habemus itaque $\left.\begin{array}{l} E:\varepsilon = C:c \\ \varepsilon:e = T:t \end{array}\right\}$ unde elicitur Theorema $E:e = CT:ct$; videlicet

3. *Effectus sunt in ratione composita causarum, & temporum.*

Quod si effectus ponantur æquales, tunc fit $CT = ct$, adeoque provenit $C:c = t:T$, nempe

4. *Si Effectus sint æquales, causæ sunt temporibus reciprocè proportionales, & vicissim.*

Datis igitur quinque ex sex hisce quantitatibus C, c, E, e, T, t, sexta semper obtinetur; etenim propter $Ect = eCT$ (180.) prodeunt sex formulæ, sed tres sequentes in casu nostro sufficiunt, nimirum

$$\overset{a}{1}.\ c = \frac{CeT}{Et}\ ;\quad \overset{a}{2}.\ e = \frac{cEt}{CT};\quad \overset{a}{3}.\ t = \frac{CeT}{cE}.$$

Hisce præjactis, examinetur, quidnam sit illud in quæsito, quod vices gerat causæ, vel effectus, vel temporis; deinde ad memoriam juvandam, unaquæque ex his tribus circumstantiis suis speciebus insigniatur; quod si rite præstabis, quæsiti solutio sponte fluet. Cave tamen, ne quæsiti enunciatione deceptus, effectus cum causis confundas, falsisque speciebus designes. Quoad tempus quoque aliquid præmonere opus est; accidit enim interdum, ut nullam de ipso quæstio mentionem faciat, sed quamvis de tem-

tempore sileat, aliquid tamen tempori analogum semper attingit, quod calculum loco temporis subire debet. *Generatim ex iis, quæ quodvis quæsitum ingrediuntur, quidquid actionem facit absumendi, vel lucrandi est causa; res absumpta, vel lucrifacta est effectus; reliquum est tempus.*

Exemplum I. Si aurei 400 (C) intra menses 8 (T) afferunt lucrum aureorum 18 (E), quodnam lucrum (e) aurei 100 (c) afferent intra menses 12 (t)? Quæsiti hujus incognita est e; quare confugiendum ad formulam secundam, ubi $e = \frac{cEt}{CT}$, ac proinde $e = \frac{100.\ 18.\ 12}{400.\ 8} = \frac{21600}{3200} = 6 + \frac{3}{4}$.

Exemplum II. Dux aureis 400 sustinet milites 60 mensibus 6; quæro tempus, quo aureis 1220 milites 90, eodem servato regimine, sustentabit? Quæsitum sic ex dictis transformandum. Si milites 60 (C) mensibus 6 (T) absumunt aureos 400 (E), quo tempore (t) milites 90 (c) absument aureos 1220 (e)? Quoniam incognita est t, invenietur per formulam tertiam $t = \frac{CeT}{cE} = \frac{60.\ 1220.\ 6}{90.\ 400} = \frac{439200}{36000} = 12 + \frac{1}{5}$; hoc est annus unus, ac dies sex.

Exemplum III. Plaustra 10 (C) vecta per 12 milliaria (T) exigunt pro mercede certam pecu-

niæ ſummam (E); quot plauſtris (c) per 20 milliaria (s) vectis eadem ſumma (E) ſolvenda eſt? Hoc quæſitum ob incognitam c ad formulam primam pertinet, ubi $c = \frac{CeT}{Es}$; ſed $e = E$; ergo

$$c = \frac{CT}{s} = \frac{10.12}{20} = \frac{120}{20} = 6.$$

CAPUT III.

PRINCIPIA CALCULI SINUUM.

Definitiones.

Ductis in circulo $AFNE$ (*Fig.* 2.) duabus diametris AB, EF ſe invicem ad angulos rectos decuſſantibus, agatur ex centro C recta CM angulum quemlibet ACM efficiens cum radio AC, & ex puncto M, ubi CM circumferentiam ſecat, demittatur ſupra radium CA perpendicularis MS; Erunt

192. Angulus MCF, ſive *arcus* MF *complementum* tam anguli ACM, ſive *arcus* AM, quam anguli MCB, ſive *arcus* MFB, & viciſſim.

193. Angulus obtuſus MCB, ſive *arcus* MFB *ſupplementum* anguli ACM, ſive arcus AM, & viciſſim.

194. Recta MS vocatur *ſinus* arcus AM, ſive anguli ad centrum ACM, *arcus* enim eſt anguli cen-

centralis respondentis mensura, adeoque quidquid de *arcubus* deinceps dicetur, de angulis suis centralibus dictum intelligatur.

195. Intercepta inter puncta A, S, nempe inter *arcus* AM originem, & punctum, ubi *sinus* ejusdem *arcus radium* secat, *sinus versus* ipsius *arcus* AM appellatur.

196. Perpendicularis AT ex diametri BA extremitate A excitata, & rectæ CM productæ occurrens in T, *tangens*, CT vero *secans* ejusdem *arcus* AM.

197. Quum *arcus* MF sit complementum dicti arcus AM, si eadem ac superior circa hunc *arcum* MF constructio peragatur, vocantur $PM = SC$ *cosinus*, FK *cotangens*, CK *cosecans*, PF *cosinus versus*, omnes ejusdem arcus AM.

198. *Sinus*, *cosinus*, *tangens*, *cotangens* &c. anguli obtusi MCB, vel *arcus* MFB, sunt quoque *sinus*, *cosinus* &c. anguli acuti ACM, vel *arcus* AM. Etenim perpendiculares ex alterutra extremitate M, vel B *arcus* MFB demissæ vel ad *radium* AC, vel ad *radium* Cm diametri Mm, quæ vi constructionis sunt etiam *sinus arcus* MFB, sunt æquales, nec non æquales sunt *tangentes* Bt, AT, adeoque *cosinus* sC, SC, *secantes* Ct, CT, & *sinus versi* ms, SA.

199. *Hypothesis.* Analytice compendii gratia exprimimus r pro *radio* (qui etiam *sinus totus* vocatur), *sin* pro sinu, *tang* pro tangente, *sec* pro secante, *sin v* pro sinu verso, *cos* pro cosinu, *cot* pro cotangente, *cosec* pro cosecante, *cos v* pro cosinu verso. Sic *sin a* indicat sinum arcus a, *cos b* cosinum arcus b, & ita porro.

Ex

Ex hisce Definitionibus sequentia profluunt *Theoremata*.

200. Positis arcu $AM = a$ radio $r = 1$ (quod posthac pro faciliori calculo plerumque retinebimus), erit $\sin^2 a + \cos^2 a = 1 = \sin^2 b + \cos^2 b$. Dato igitur sinu alicujus arcus, datur etiam ejus cosinus, & vicissim.

201. *Sinus arcus* cujuslibet est dimidium chordæ *arcus* dupli; producta enim MP usque ad circumferentiam in N, erit MP dimidium rectæ MN, quæ est *chorda* arcus dupli MFN. Hinc $\sin 30°$ est dimidium *radii*, quòd est dimidium lateris hexagoni, vel *chordæ* $60°$, quæ *radium* adæquat.

202. *Tangens*, nec non *cotangens* $45°$ sunt singulæ *radio* æquales, tunc enim triangula rectangula CAT, CFK evadunt æqualia, & isoscelia, ob utrosque angulos ad basim æquales, ut videre est in *Fig.* 3. ubi pariter constat, $\sin$ arcus $45°$ esse æqualem *cosinui*.

203. *Cosinus* SC arcus cujuslibet AM est æqualis *sinui* MP arcus MF, qui est ejusdem arcus AM *complementum* (192.); & *sinus* MS cujusvis arcus AM adæquat *cosinum* PC sui *complementi* MF; Hinc

204. $\sin (45° + a) = \cos (45° - a)$; & $\sin (45° - a) = \cos (45° + a)$. Sit enim AL [*Fig.* 3] arcus $45°$, & LM arcus $= a$, erit arcus $AM = (45° + a)$ cujus *sinus* $MS = PC = \cos$ arcus $FM = (45° - a)$.

205. Similiter $\tang (45° + a) = \cot (45° - a)$, & vicissim $\tang (45° - a) = \cot (45° + a)$, ut ex sola figuræ inspectione patet.

206.

206. $\overline{CT}^2 - \overline{TA}^2 = \overline{CA}^2$; seu $sec^2 a - tang^2 a = 1$; ergo $sec\ a + tang\ a : 1 = 1 : sec\ a - tang\ a$. Hic etiam $sec^2 a - tang^2 a = sec^2 b - tang^2 b = 1$.

207. $\overline{CK}^2 - \overline{FK}^2 = \overline{CF}^2$; seu $cosec^2 a - cot^2 a = 1 = sec^2 a - tang^2 a$; ergo $cosec\ a - cot\ a : 1 = 1 : cosec\ a + cot\ a$, &c.

208. Ob similia triangula SCM, ACT, habemus

(1.) $CS : SM = CA : AT$; seu $cos\ a : sin\ a = 1 : tang\ a$. Ergo $sin\ a = cos\ a \times tang\ a$; $cos\ a = \frac{sin\ a}{tang\ a}$; & $tang\ a = \frac{sin\ a}{cos\ a}$.

(2.) $CS : CM = CA : CT$; seu $cos\ a : 1 = 1 : sec\ a$. Ergo $cos\ a = \frac{1}{sec\ a}$; $sec\ a = \frac{1}{cos\ a}$; & $cos\ a \times sec\ a = 1$.

(3.) $SM : AT = CM : CT$; seu $sin\ a : tang\ a = 1 : sec\ a$; ergo $sec\ a = \frac{tang\ a}{sin\ a}$; $sin\ a = \frac{tang\ a}{sec\ a}$; & $tang\ a = sin\ a \times sec\ a$.

209. Ob triangula similia ACT, CFK, habemus

(1.) $AT : CA = CF : FK$; seu $tang\ a : 1 = 1 : cot\ a$. Ergo $tang\ a = \frac{1}{cot\ a}$; $cot\ a = \frac{1}{tang\ a}$; & $tang\ a \times cot\ a = 1$.

(2.) $AC : CT = FK : CK$: seu $1 : sec\ a = cot\ a :$ cosec

cosec a. Ergo $sec\ a = \frac{cosec\ a}{cot\ a}$; $cosec\ a = sec\ a \times cot\ a$; & $cot\ a = \frac{cosec\ a}{sec\ a}$.

(3.) $AT : CT = CF : CK$; seu $tang\ a : sec\ a = 1 : cosec\ a$. Ergo $tang\ a = \frac{sec\ a}{cosec\ a}$; $sec\ a = tang\ a \times cosec\ a$; & $cosec\ a = \frac{sec\ a}{tang\ a}$.

210. Ob triangula similia SCM, CKF, habemus

(1.) $SM : CS = CF : FK$; seu $sin\ a : cos\ a = 1 : cot\ a$. Ergo $sin\ a = \frac{cos\ a}{cot\ a}$; $cos\ a = sin\ a \times cot\ a$; & $cot\ a = \frac{cos\ a}{sin\ a}$.

(2.) $CS : CM = FK : CK$; seu $cos\ a : 1 = cot\ a : cosec\ a$. Ergo $cos\ a = \frac{cot\ a}{cosec\ a}$; $cot\ a = cos\ a \times cosec\ a$; & $cosec\ a = \frac{cot\ a}{cos\ a}$.

(3.) $SM : CM = CF : CK$; seu $sin\ a : 1 = 1 : cosec\ a$. Ergo $sin\ a = \frac{1}{cosec\ a}$; $sin\ a \times cosec\ a = 1$;

&

& $cosec\ a = \frac{1}{sin\ a}$.

&c.

211. Valores igitur æquales conquirendo colligimus

(1.) $Sin\ a = cos\ a \times tang\ a = \frac{tang\ a}{sec\ a} = \frac{cos\ a}{cot\ a} = \frac{1}{cosec\ a}$.

(2.) $Cos\ a = \frac{sin\ a}{tang\ a} = \frac{1}{sec\ a} = sin\ a \times cot\ a = \frac{cot\ a}{cosec\ a}$.

(3.) $Tang\ a = \frac{sin\ a}{cos\ a} = sin\ a \times sec\ a = \frac{1}{cot\ a} = \frac{sec\ a}{cosec\ a}$.

(4.) $Cot\ a = \frac{1}{tang\ a} = \frac{cosec\ a}{sec\ a} = \frac{cos\ a}{sin\ a} = cos\ a \times cosec\ a$.

(5.) $Sec\ a = \frac{1}{cos\ a} = \frac{tang\ a}{sin\ a} = \frac{cosec\ a}{cot\ a} = tang\ a \times cosec\ a$.

(6.)

(6.) $Cosec\ a = sec\ a \times cot\ a = \frac{sec\ a}{tang\ a} = \frac{cot\ a}{cos\ a} = \frac{1}{sin\ a}$.

(7.) 1, seu $r^2 = cos\ a \times sec\ a = tang\ a \times cot\ a = sin\ a \times cosec\ a = cos\ b \times sec\ b = tang\ b \times cot\ b = sin\ b \times cosec\ b = sin^2 a + cos^2 a = sec^2 a - tang^2 a = cosec^2 a - cot^2 a = sin^2 b + cos^2 b$, &c.

(8.) 1, seu $r = \frac{tang\ a \times cos\ a}{sin\ a} = \frac{sin\ a \times sec\ a}{tang\ a} = \frac{sec\ a \times cot\ a}{cosec\ a} = \frac{cosec\ a \times tang\ a}{sec\ a} = \frac{sin\ a \times cot\ a}{cos\ a} = \frac{cos\ a \times cosec\ a}{cot\ a} = \frac{tang\ b \times cos\ b}{sin\ b}$, &c.

212. *Scholion.* Ad signorum *sinus*, *cosinus*, &c. præeuntium, nec non ipsorum *sinuum*, *cosinuum*, &c. mutationes dignoscendas, concipe (stante *radio* CA) *radium* CM [*Fig.* 2.] ab origine A versus F in orbem moveri, ita ut dum circumferentiam percurrit, angulos omnes possibiles ACM, ACF, ACN, &c. adeoque *arcus* omnes AM, AF, AN, &c. iis respondentes exhibeat. Hoc præmisso, sequentia veniunt consideranda.

(1.) In puncto A, ubi *arcus* $= 0°$, habemus $sin = 0$, $cos = r = 1$. Ergo $tang = \frac{1 \times sin}{cos}$ (211. n. 3.) $= 0$;

$= 0$; *cot* $= \frac{1}{tang}$ (*ibid.* n. 4.) $= \infty$; *sec* $= \frac{1}{cos}$

(*ibid.* n. 5.) $= 1$; *cosec* $= \frac{1}{sin}$ (*ibid.* n.6.) $= \infty$.

(2.) Ab *arcu* 0° usque ad 90° *sinus* augetur, *cosinus* imminuitur; ergo *tang* est positiva crescens; *cot* positiva decrescens; *sec* positiva crescens; *cosec* positiva decrescens.

(3.) Ubi *arcus* $= 90°$, *sin* $= r$, *cos* $= 0$. Ergo *tang* $= \infty$; *cot* $= 0$; *sec* $= \infty$; *cosec* $= 1$.

(4.) Ab arcu 90° usque ad 180° *sinus* semper positivus decrescit, *cosinus* negativus augetur. Ergo *tang* est negativa decrescens; *cot* negativa crescens; *sec* negativa crescens; *cosec* positiva crescens.

(5.) Ubi *arcus* $= 180°$, *sin* $= 0$, *cos* $= -1$. Ergo *tang* $= 0$, *cot* $= \infty$; *sec* $= 1$; *cosec* $= \infty$.

(6.) Ab *arcu* 180° usque ad 270° *sinus* est negativus crescens, *cosinus* negativus decrescens. Ergo *tang* positiva crescens; *cot* positiva decrescens; *sec* negativa crescens; *cosec* negativa decrescens.

(7.) Ubi arcus $= 270°$, *sinus* $= -1$, *cosinus* $= 0$. Ergo *tang* $= \infty$; *cot* $= 0$; *sec* $= \infty$; *cosec* $= -1$.

(8.) Tandem ultra 270° *sinus* est negativus decrescens, *cosinus* positivus crescens. Ergo *tang* negativa decrescens; *cot* negativa crescens; *sec* positiva decrescens; *cosec* negativa crescens; idque usque ad 360°, ubi omnia ut ante redeunt.

(9.)

(9.) Igitur si ponamus semicircumferentiam $= \pi$, quum sit *sin* $0 = 0$; *cos* $0 = 1$; *sin* $\frac{1}{2}\pi = 1$; *cos* $\frac{1}{2}\pi = 0$; *sin* $\pi = 0$; *cos* $\pi = -1$; *sin* $\frac{3}{2}\pi = -1$; *cos* $\frac{3}{2}\pi = 0$; *sin* $2\pi = 0$: *cos* $2\pi = 1$; constat, omnes sinus, & cosinus inter limites $+1$, & -1 esse conclusos.

213. *Monitum* I. Ut hæc fiant Tironi magis perspicua, perpendat hic, *tangentem* transire semper debere per punctum *A*, *cotangentem* per punctum *F*, & *radium* occurrere alteri extremitati, ubi desinit arcus adsumptus; quamobrem si adsumatur arcus *AN* major quam 90°, sed minor quam 180°, liquet, *radium CN* occurrere non posse *tangenti AT*, occurret autem *tangenti AT'*; sed ista progreditur in partem aversam *tangenti AT*; ergo *tangens AT'* est negativa, & negativa pariter est *secans CT'*. Idem *radius* occurrere nequit *cotangenti FK*, occurrit autem cotangenti *FK'* in latus oppositum vergenti; ergo *cotangens FK'* est negativa, & *cosecans CK'* positiva. Manifestum est etiam, Theoremata præcedentia omnibus *sinuum*, *cosinuum*, &c. casibus ob triangula similia, quæ semper obveniunt, posse singillatim aptari.

214. *Monitum* II. Eædem *sinuum*, *cosinuum*, &c. affectiones persistunt, si *arcus* accipiantur negativi, ve-

velut AM', AE, Am, &c., eſt enim $M'S'$ *ſinus arcus* negativi AM', & MS *ſinus arcus* negativi $AEBFM$, &c. ut etiam ex ſola figuræ inſpectione ſtatim apparet; ex quo ſequentia dimanant.

(1.°) *Sinus* negativus, & *coſinus* poſitivus indicant vel *arcum* poſitivum tribus quadrantibus majorem; vel *arcum* negativum quadrante minorem.

(2.°) *Sinus*, & *coſinus* negativi indicant vel *arcum* poſitivum duobus quadrantibus majorem, ſed tribus minorem; vel *arcum* negativum minorem duobus quadrantibus, ſed uno majorem.

(3.°) *Sinus* poſitivus, & *coſinus* negativus indicant vel *arcum* poſitivum uno quadrante majorem, ſed duobus quadrantibus minorem; vel *arcum* negativum duobus quadrantibus majorem, ſed tribus minorem.

(4.°) *Sinus*, & *coſinus* poſitivi indicant vel *arcum* poſitivum quadrante minorem; vel *arcum* negativum tribus quadrantibus majorem.

(5.°) Expedit tamen, cum in *ſinum*, & *coſinum* poſitivos, vel in *ſinum* poſitivum, & *coſinum* negativum incidimus, *arcus* poſitivos accipere; cum autem *ſinus*, & *coſinus* negativi, vel *ſinus* negativus, & *coſinus* poſitivus occurrunt, ſumere *arcus* negativos. Etenim ſic agendo, *arcus* ſemicircumferentia ſemper minores, adeoque angulos duobus rectis minores in praxi obtinebimus, quod ad *ſinus* in trigonometria computandos eſt neceſſarium. Itidem cum exprimere volumus coſinum arcus v, poſſumus etiam ſcribere $\cos - v$, eſt enim idem coſinus utriſ-

que expressionibus communis. Eadem ratione sinus arcus $-v = -\mathit{sin}\ v$.

215. *Monitum* III. Neque est præterea omittendum, esse *MS sinum*, *SC cosinum* infinitorum *arcuum*, tam positivorum, quam negativorum; nimirum positis circumferentia $= C$, *arcu* $AM = A$, est *MS sinus*, pariterque *SC cosinus arcuum* $A, C+A$, $2C+A$, $3C+A$, &c. nec non *arcuum* $C-A$, $2C-A$, $3C-A$, &c. omnes enim cosinus existere debent in diametro AB citra vel ultra centrum C (212.), quamvis *radio* non majores.

216. Propositio I. *Dato arcu quovis* AM [*Fig.* 2.] *cujus cosinus* SC, *si sumptis omnibus arcubus possibilibus eodem cosinu* SC *gaudentibus*, *tam isti arcus*, *quam arcus datus* AM *per* n *dividantur*; *ajo numerum cosinuum ad hujusmodi portiones pertinentium esse semper æqualem numero* n.

Dem. Ex hac divisione, per nuper dicta (215.), prodeunt duæ series

$$\frac{A}{n}, \frac{C+A}{n}, \frac{2C+A}{n}, \frac{3C+A}{n}, \frac{4C+A}{n}, \text{ \&c.}$$

$$\frac{C-A}{n}, \frac{2C-A}{n}, \frac{3C-A}{n}, \frac{4C-A}{n}, \frac{5C-A}{n}, \text{ \&c.}$$

Jam vero secundæ seriei cosinus cum primæ cosinubus congruunt, quod statim deprehenditur, si pro n numerum quemlibet, putá 5, statuamus, tunc enim series evadunt

$\frac{A}{5}$,

$$\frac{A}{5},\ \frac{C+A}{5},\ \frac{2C+A}{5},\ \frac{3C+A}{5},\ \frac{4C+A}{5},\ \text{\&c.}$$

$$\frac{C-A}{5},\ \frac{2C-A}{5},\ \frac{3C-A}{5},\ \frac{4C-A}{5},\ \frac{5C-A}{5},\ \text{\&c.}$$

ubi $\frac{C-A}{5}+\frac{4C+A}{5}=C$; $\frac{2C-A}{5}+\frac{3C+A}{5}$ $=C$, & sic de reliquis, & ratio est, quod sunt invicem complementa ad integram circumferentiam, adeoque arcus isti habent *cosinum* communem. Sed si terminorum numerus major sit quam 5, *cosinus* præcedentes semper redeunt; si enim accipiatur sextus primæ seriei terminus $\frac{5C+A}{5}=C+\frac{A}{5}$, ejus *cosinus* est idem cum cosinu *arcus* $\frac{A}{5}$, itidemque *cosinus arcus* $\frac{6C+A}{5}=C+\frac{C+A}{5}$ est idem cum *cosinu arcus* $\frac{C+A}{5}$, idque semper accidit, quicumque numerus fiat n. Ergo constat, numerum cosinuum ad arcus $\frac{A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$,

 4C

$\frac{4C+A}{n}$, &c. pertinentium debere semper esse æqualem numero n. *Quod erat* &c.

217. *Coroll.* Quod de *cosinuum* numero demonstravimus, valet quoque de numero *sinuum*, ut per se fit manifestum.

218. Propositio II. *Utriusque superius expositæ seriei arcus singillatim exhibere.*

Resolutio. Radio CA [*Fig.* 4] descripto circulo ABE, sumptoque *arcu* quolibet AM, cujus pars quinta sit AL, si exordio sumpto a puncto L, dividatur integra circumferentia in totidem partes æquales LB, BD, DE, EF, FL, erit *arcus* $AMB = \frac{A+C}{5}$, nam [*per hyp.*] $LB = \frac{1}{5} C$, & $AL = \frac{1}{5} AM = \frac{1}{5} A$. Pari ratione arcus $ABD = \frac{A+2C}{5}$, est enim LD pars quinta duarum circumferentiarum, & sic deinceps, quibus *arcubus* respondent quinque respectivi *cosinus*. Igitur si fuerit $AL = \frac{AM}{n} = \frac{A}{n}$, secta circumferentia in partes æquales n, incipiendo a puncto L, erit $AB = \frac{A+C}{n}$,

AD

$AD = \frac{A+2C}{n}$, $AE = \frac{A+3C}{n}$, & ita porro; quibus *arcubus* totidem respondent *cosinus* numerum n non excedentes (216.).

Iisdem manentibus, erit *arcus* $AF = \frac{C-A}{5}$, nam $LF = \frac{1}{5}C$ [*per constr.*], & $AL = \frac{1}{5}A$; hinc *arcus* $AFE = LFE - AL = \frac{2C-A}{5}$, & sic deinceps; quare si tota circumferentia, initio facto a puncto L, sit divisa in partes n, stante semper $AL = \frac{A}{n}$, erit $AF = \frac{C-A}{n}$, $AFE = \frac{2C-A}{n}$, &c. unde prodit conjunctim series $\frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$, $\frac{3C+A}{n}$, &c. *Quod erat* &c.

219. *Coroll.* 1. Si fiat arcus $A = 0$, tunc series novissima evadit 0, $\frac{C}{n}$, $\frac{C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, $\frac{3C}{n}$, $\frac{3C}{n}$, $\frac{4C}{n}$, $\frac{4C}{n}$, &c. Sin autem fiat $A = C$, tunc dicta series migrat in

in $\frac{C}{n}$, o, $\frac{2C}{n}$, $\frac{C}{n}$, $\frac{3C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, $\frac{4C}{n}$, $\frac{3C}{n}$, &c., quæ cum antecedente congruit; ablatis vero terminis repetitis, fit o, $\frac{C}{n}$, $\frac{2C}{n}$, $\frac{3C}{n}$, $\frac{4C}{n}$, &c. quæ in futuri commodi gratiam ſic etiam exprimi poteſt o, $\frac{2C}{2n}$, $\frac{4C}{2n}$, $\frac{6C}{2n}$, $\frac{8C}{2n}$, &c.

220. *Coroll.* 2. Si pro primo *arcu* A ſumatur ſemicircumferentia, ſive fiat $A = \frac{1}{2}C$, tunc ſeries

$\frac{A}{n}$, $\frac{C-A}{n}$, $\frac{C+A}{n}$, $\frac{2C-A}{n}$, $\frac{2C+A}{n}$, $\frac{3C-A}{n}$, &c.

tranſit in $\frac{C}{2n}$, $\frac{C-\frac{1}{2}C}{n} = \frac{C}{2n}$, $\frac{C+\frac{1}{2}C}{n} = \frac{3C}{2n}$, $\frac{2C-\frac{1}{2}C}{n} = \frac{3C}{2n}$, &c. nimirum in $\frac{C}{2n}$, $\frac{C}{2n}$, $\frac{3C}{2n}$, $\frac{3C}{2n}$, $\frac{5C}{2n}$, $\frac{5C}{2n}$, &c., quæ, rejectis terminis repetitis, evadit $\frac{C}{2n}$, $\frac{3C}{2n}$, $\frac{5C}{2n}$, $\frac{7C}{2n}$, &c.

221.

221. Propositio III. *Datis duorum arcuum* AM $=$ a [*Fig.* 5.], MN $=$ b *sinubus* MS, NQ, *cosinubus* SC, QC, *invenire sinum, & cosinum, qui tam eorum arcuum summæ, quam eorumdem differentiæ sint æquales.*

Resolutio. Producta NQ, donec occurrat circumferentiæ in B, & demissis ex punctis B, N ad radium CA normalibus BD, NP, nec non ex punctis B, Q ad NP normalibus BL, QH; erit $NP = PH + NH = QE + NH$ sinus summæ, & $BD = QE - HL = QE - NH$ sinus differentiæ datorum arcuum AM, MN. Jam vero habemus $CM : CQ = MS : QE$, sive $1 : \cos b = \sin a : QE = \cos b \times \sin a$; itidemque $CM : CS = NQ : NH$, hoc est $1 : \cos a = \sin b : NH = \cos a \times \sin b$; Ergo $QE \pm NH = \sin[a \pm b] = \sin a \times \cos b \pm \cos a \times \sin b$; *Quod erat primum.*

Præterea $CM : CQ = CS : CE$, nempe $1 : \cos b = \cos a : CE = \cos a \times \cos b$; & $CM : MS = NQ : QH$, nimirum $1 : \sin a = \sin b : QH = \sin a \times \sin b$. Sed summæ arcuum AM, MN cosinus CP est æqualis $CE - EP = CE - HQ$, & differentiæ eorumdem arcuum cosinus CD est æqualis $CE + ED = CE + HQ$; ergo $CE \mp HQ = \cos[a \pm b] = \cos a \times \cos b \mp \sin a \times \sin b$; *Quod erat secundum.*

222. *Coroll.* 1. Hinc valores tangentium, & cotangentium, quæ pertinent ad duorum arcuum summam, & differentiam. Etenim $\tan g\,[a \pm b] =$

$$\frac{\sin(a \pm b)}{\cos(a \pm b)} (230.\text{n}.3.) = \frac{\sin a \times \cos b \pm \cos a \times \sin b}{\cos a \times \cos b \mp \sin a \times \sin b},$$

& dividendo ſupra & infra per $cos\ a \times cos\ b$, fit $tang$

$$(a \pm b) = \left(\frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b}\right) : \left(\frac{1 \mp \sin a \times \sin b}{\cos a \times \cos b}\right)$$

$$= \frac{tang\ a \pm tang\ b}{1 \mp tang\ a \times tang\ b} \text{ (l. cit.)} = \frac{cot\ b \pm cot\ a}{cot\ a \times cot\ b \mp 1},$$

quia $tang\ a \pm tang\ b = \frac{1}{cot\ a} \pm \frac{1}{cot\ b}$ [*l. cit.*] $=$

$\frac{cot\ b \pm cot\ a}{cot\ a \times cot\ b}$ (33.), & $1 \mp tang\ a \times tang\ b =$

$\frac{cot\ a \times cot\ b \mp 1}{cot\ a \times cot\ b}$, ponendo $\frac{1}{cot}$ pro $tang$, & ad eundem denominatorem reducendo. Quum autem cotangentes ſint tangentibus inverſæ, ſtatim habetur $cot[a \pm b] = \frac{1}{tang[a \pm b]} = \frac{1 \mp tang\ a \times tang\ b}{tang\ a \pm tang\ b}$

$= \frac{cot\ a \times cot\ b \mp 1}{cot\ b \pm cot\ a}$, tangentis expreſſiones repertas invertendo.

223. *Coroll.* 2. Pari facilitate habentur ſecantes, & coſecantes ad duorum arcuum cum ſummam, tum differentiam attinentes. Nam $sec\ [a \pm b] =$

$\frac{1}{cos[a \pm b]}$ (211.n.5.) $= \frac{1}{cos\ a \times cos\ b \mp \sin a \times \sin b}$;

&

& dividendo ſupra, & infra per $cos\ a \times cos\ b$; proveniet $sec\ [a \pm b] = \left(\frac{1}{cos\ a \times cos\ b}\right)$:
$\left(1 \mp \frac{sin\ a \times sin\ b}{cos\ a \times cos\ b}\right) = \frac{sec\ a \times sec\ b}{1 \mp tang\ a \times tang\ b}$
($l.\ cit.$ n. 3. & 5.) $= \frac{cosec\ a \times cosec\ b}{cot\ a \times cot\ b \mp 1}$, quia $sec\ a \times sec\ b = \frac{1}{cos\ a \times cos\ b}$ [*ibid.*]; $1 \mp tang\ a \times tang\ b = 1 \mp \frac{1}{cot\ a \times cot\ b} = \frac{cot\ a \times cot\ b \mp 1}{cot\ a \times cot\ b}$;
& $cosec = \frac{cot}{cos}$ [*ibid.* n. 6.].

Quoniam vero $cosec = \frac{sec}{tang}$ [*ibid.*], erit $cosec$ $[a \pm b] = \frac{sec\ (a \pm b)}{tang\ (a \pm b)} = \left(\frac{cosec\ a \times cosec\ b}{cot\ a \times cot\ b \mp 1}\right)$:
$\left(\frac{cot\ b \mp cot\ a}{cot\ a \times cot\ b \mp 1}\right) = \frac{cosec\ a \times cosec\ b}{cot\ b \pm cot\ a}$.

224. Propoſitio IV. *Arcus multipli ſinum, & coſinum invenire.*

Re-

Resolutio. In expressione $sin\ (b + a)$ substitue $na = b$, ubi n est numerus integer affirmativus, tum pone $sin\ a = s$, $cos\ a = c$, erit

$$sin\ (na + a) = sin\ (na) \times c + cos\ (na) \times s$$
$$cos\ (na + a) = cos\ (na) \times c - sin\ (na) \times s.$$

Quare si $n = 1$; erit $sin\ 2a = 2cs$; $cos\ 2a = c^2 - s^2$. Si $n = 2$; erit $sin\ (2n + a) = 2cs \times c + (c^2 - s^2)\ s = 3c^2 s - s^3$; sed $s^2 = 1 - c^2$; ergo $sin\ 3a = 4sc^2 - s$. $Cos\ (2a + a) = (c^2 - s^2)\ c - 2cs^2 = c^3 - 3cs^2$, & sic deinceps; unde (computato radio, seu sinu toto $= r$) profluunt

$sin\ a = s$	$cos\ a = c$
$r.\ sin\ 2a = 2cs$	$r.\ cos\ 2a = c^2 - s^2$
$r^2.\ sin\ 3a = 3c^2 s - s^3$	$r^2.\ cos\ 3a = c^3 - 3cs^2$
$r^3.\ sin\ 4a = 4c^3 s - 4cs^3$	$r^3.\ cos\ 4a = c^4 - 6c^2 s^2 + s^4$
$r^4.\ sin\ 5a = 5c^4 s - 10c^2 s^3 + s^5$ ..	$r^4.\ cos\ 5a = c^5 - 10c^3 s^2 + 5cs^4$
$r^5.\ sin\ 6a = 6c^5 s - 20c^3 s^3 + 6cs^5$ ..	$r^5.\ cos\ 6a = c^6 - 15c^4 s^2 + 15c^2 s^4 - s^6$
&c.	&c.

Si progressiones istas, earumque leges contemplemur, statim dispiciemus, formulam pro sinu anguli multipli conflari ex termino secundo, quarto, sexto, &c. formulæ jam traditæ (67.) pro binomio $c + s$ ad eam dignitatem assurgenti, cujus exponens idem est cum exponente multipli quæsiti, signa $+$, $-$ successive permutando.

Contra vero formula pro cosinu anguli multipli componetur ex terminis primo, tertio, quinto, &c. prostantibus in dicta binomii formula cum successiva signorum $+$, $-$ permutatione.

Ita-

Itaque in casu primo (pro sinu nempe anguli multipli) habemus

$$r^{n-1}(\mathit{sin}\ na = \frac{n}{1} sc^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\quad 3} s^3c^{n-3}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ (n-3)(n-4)}{1.\ 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5} s^5c^{n-5} + \&c.).$$

Quod erat primum.

In secundo casu (pro cosinu nimirum anguli multipli) nanciscimur

$$r^{n-1}(\mathit{cos}\ na = c^n - \frac{n\ (n-1)}{1.\quad 2} s^2c^{n-2} +$$

$$\frac{n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{1.\quad 2.\quad 3.\quad 4} s^4c^{n-4} -$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\quad 3.\quad 4.\quad 5.\quad 6} s^6c^{n-6} + \&c.).$$

Quod erat secundum.

225. *Coroll.* 1. Ergo si binomium $c + s\sqrt{-1}$ elevetur ad potestatem n, quum formulæ hinc emergentis termini semper habeant duas consecutiones affirmativas, duasque negativas se alternatim succedentes, adeoque tam termini in locis paribus, quam in disparibus accepti per continuatas signorum permutationes progrediantur, facto radio $r = 1$, erit

$(c + s\sqrt{-1})^n$, sive $(\mathit{cos}\ v + \sqrt{-1}\,\mathit{sin}\ v)^n = \mathit{cos}$ nv $+ \sqrt{-1}\,\mathit{sin}$ nv.

226.

226. *Coroll.* 2. Si manente, ut plerumque moris eſt, radio $r = 1$, ſtatuatur $s^2 = 1 - c^2$, emerget

$\sin a = s$ .... $\cos a = c$
$\sin 2a = 2cs$ .... $\cos 2a = c^2 - s^2$
$\sin 3a = 4c^2s - s$ .... $\cos 3a = c^3 - 3cs^2$
$\sin 4a = 8c^3s - 4cs$ .... $\cos 4a = c^4 - 6c^2s^2 + s^4$
$\sin 5a = 16c^4s - 12c^2s + s$ .... $\cos 5a = c^5 - 10c^3s^2 + 5cs^4$
&c. &c.

Seu, pro s ſubſtituendo $\sqrt{1-cc}$,

$\sin a = \sqrt{1-cc}$ .... $\cos a = c$
$\sin 2a = 2c\sqrt{1-cc}$ .... $\cos 2a = 2cc - 1$
$\sin 3a = (4cc - 1)\sqrt{1-cc}$ .... $\cos 3a = 4c^3 - 3c$
$\sin 4a = (8c^3 - 4c)\sqrt{1-cc}$ .... $\cos 4a = 8c^4 - 8c^2 + 1$
$\sin 5a = (16c^4 - 12c^2 + 1)\sqrt{1-cc}$ .. $\cos 5a = 16c^5 - 20c^3 + 5c$
&c. &c.

227. *Scholion.* Formula generalis pro ultima ſinuum ſerie, radio r reſtituto, eſt ſequens

$$\sin na = \Big(2^{n-1}c^{n-1} - (n-2)\,2^{n-3}c^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}\,2^{n-5}c^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\,.\,2\,.\,3} \times$$

$$2^{n-7}c^{n-7} + \frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} \times$$

$$2^{n-9}c^{n-9} - \&c.\Big)\sqrt{rr-cc}\,.$$

Pro ultima vero coſinuum ſerie

$$r^{n-1}\cos na = 2^{n-1}c^{n} - \frac{n}{1}\,r^2 2^{n-3}c^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1\,.\,2} \times$$

r^4

$$r^4 2^{n-5} c^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3} r^6 2^{n-7} c^{n-6} +$$

$$\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.\ 2.\ 3.\ 4} 2^{n-9} r^8 c^{n-8} - \&c.$$

228. Propositio V. *Data tangente arcus simpli, tangentem arcus multipli determinare.*

Resolutio. Quoniam positis tangente $= t$, radio $= r$, sinu $= s$, cosinu $= c$, habemus $c:s = r:t$, erit (*per Proposition. antec.*) $\frac{1}{r^{n-1}}(c^n - \frac{n(n-1)}{1.\ 2} \times$

$s^2 c^{n-2} + \&c.)$ ad $\frac{1}{r^{n-1}}(nsc^{n-1} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} \times$

$s^3 c^{n-3} + \&c.)$ ut r ad t. Brevitatis gratia pro cosinuum coëfficientibus substitue A, B, C, D, &c., & P, Q, R, S, &c. pro coëfficientibus sinuum; proveniet tangens $=$

$$\frac{Prsc^{n-1} - Qrs^3c^{n-3} + Rrs^5c^{n-5} - Srs^7c^{n-7}}{c^n - As^2c^{n-2} + Bs^4c^{n-4} + Cs^6c^{n-6}} \&c.$$

Sed $c = \frac{rs}{t}$; ergo hoc valore in locum c suffecto, fit tangens $=$

P

$$\frac{\dfrac{Ps^n r^n}{t^{n-1}} - \dfrac{\mathfrak{Q} s^n r^{n-2}}{t^{n-3}} + \dfrac{Rs^n r^{n-4}}{t^{n-5}} - \dfrac{Ss^n r^{n-6}}{t^{n-7}}}{\dfrac{s^n r^n}{t^n} - \dfrac{As^n r^{n-2}}{t^{n-2}} + \dfrac{Bs^n r^{n-4}}{t^{n-4}} - \dfrac{Cs^n r^{n-6}}{t^{n-6}}} \text{ \&c.}$$

Multiplica per t^n, ac divide per s^n; obtinebis tangentem indeterminatam

$$\frac{Pr^n t - \mathfrak{Q}r^{n-2} t^3 + Rr^{n-4} t^5 - Sr^{n-6} t^7 \text{ \&c.}}{r^n - Ar^{n-2} t^2 + Br^{n-4} t^4 - Cr^{n-6} t^6 \text{ \&c.}}$$

Denique litterarum P, $\mathfrak{Q}$, R, S, &c. nec non A, B, C, D, &c. valoribus restitutis, tangentium formula generalis evadit

$$\frac{\frac{n}{1} r^n t - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} r^{n-2} t^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} r^{n-4} t^5 - \text{\&c.}}{r^n - \frac{n(n-1)}{1.2} r^{n-2} t^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} r^{n-4} t^4 \text{ \&c.}}$$

Ex quo videmus, quod si binomio $r+t$ ad potestatem n elevato tam terminos impares, quam pares cum signis alternis $+$, $-$ separatim seligamus, fractionemque formemus, in qua ex primis fiat denominator, ex secundis ductis in r numerator, fractio exurget tangentem exprimens indefinitam. *Quod erat* &c.

229. *Coroll.* Igitur (pro t statuendo $t\sqrt{-1}$) si post formularum $(r+t\sqrt{-1})^n$, $(r-t\sqrt{-1})^n$ eve-

evolutionem earum termini addantur, emerget duplus fractionis tangentem indeterminatam $\sqrt{-1}\, tang\ nv$ exhibentis denominator, ut exigit Propositio; si vero dicti secundæ formulæ termini a terminis primæ subtrahantur, & residuum per r multiplicetur, prodibit ejusdem fractionis duplus numerator; Quocirca valebit

$$\frac{r(r+\sqrt{-1}\; tang\ v)^n - r(r-\sqrt{-1}\; tang\ v)^n}{(r+\sqrt{-1}\; tang\ v)^n + (r-\sqrt{-1}\; tang\ v)^n} = \sqrt{-1}\; tang\ nv.$$

230. Propositio VI. *Data secante arcus simpli, arcus multipli secantem investigare.*

Resolutio. Posita secante $= f$, quum sit $c : r = r : f$, erit $f = \frac{r^2}{c}$. Sumpta igitur formula cosinus anguli multipli, qua in Prop. antec. usi fuimus, secans indefinita erit

$$\frac{r^{n+1}}{c^n - As^2c^{n-2} + Bs^4c^{n-4} - Cs^6c^{n-6}}$$

Sed $r : s = f : t$, ideoque $r = \frac{fs}{t}$; ergo substituendo fit

$$\frac{rs^n f^n}{c^n t^n - As^2c^{n-2}t^n + Bs^4c^{n-4}t^n - \&c.}$$

Jam

Jam vero quia $c:s = r:t$, ac proinde $c = \frac{rs}{t}$, hoc valore pro c ſubſtituto, ac deinde facta per rs^n diviſione, tandem prodit

$$\frac{s^n}{r^{n-1} - Ar^{n-3}t^2 + Br^{n-5}t^4 - Cr^{n-7}t^6 + \&c.}$$

valor ſecantis indeterminatæ ex tangente, & ſecante anguli ſimpli. *Quod erat* &c.

231. *Coroll.* Si duabus formulis $(c+s\sqrt{-1})^n$, $(c-s\sqrt{-1})^n$ in ſeriem Newtonianam evolutis, ſecunda ſeries dematur a prima, prodibunt dupli termini pares, adeoque nova conſurget ſeries, quæ per $2r^{n-1}$ diviſa exprimet coſinum anguli multipli. Hinc

$$\frac{r^2}{\cos nv} = \frac{2r^{n+1}}{(\cos v + \sqrt{-1}\sin v)^n - (\cos v - \sqrt{-1}\sin v)^n}$$

$= \sec nv$.

Sinuum & coſinuum calculus eſt uſus in Algebra eximii, quare ejus ſtudium Tironibus etiam atque etiam commendamus. At hæc in præſentiarum, ne ipſos nimium fatigemus ſint ſatis.

Iſtud argumentum rurſus alibi tractandum ſuſcipiemus, & nonnulla ex jam expoſitis iterum alio modo demonſtrabimus.

CA-

CAPUT IV.

DE LOGARITHMIS.

232. *DEfinitio* I. Quoniam a^z exprimit seriem geometricam continuam, dummodo pro variabili z substituantur successive numeri naturales a zero incipientes, & a sit numerus unitate major; si duæ istæ series ita disponantur, ut singulis seriei geometricæ terminis singuli seriei arithmeticæ termini respondentes immineant, isti eorum *logarithmi* appellantur. Sic positis constanti $a = 2$, $z = 0$, erit $a^z = 1$; fiat $z = 1$, erit $a^z = 2$; statuatur $z = 2$, erit $a^z = 4$: &c., ex quo duæ series

0, 1, 2, 3, 4, 5, &c.
1, 2, 4, 8, 16, 32, &c.

prima arithmetica, secunda geometrica efficiuntur, & sic de reliquis mutato ipsius a valore.

233. *Coroll.* Potestatum igitur in serie continua progredientium exponentes sunt earum logarithmi.

234. *Definitio* II. Numerus, cujus logarithmus est unitas, dicitur *basis* systematis logarithmici.

235. *Hypothesis.* Logarithmum per speciem, seu literam l deinceps designabimus. Sic la exprimet logarithmum termini a, & $3lb$ triplum logarithmi magnitudinis b repræsentabit. Similiter $l.la$ logarithmum logarithmi quantitatis a significat. Iidem $(la)^{\pm m}$ denotat logarithmum termini vel radicis a elevatum

tum ad poteſtatem $\pm m$; ubi diſtingui debet $(la)^{\pm m}$ a logarithmo $l(a)^{\pm m}$, qui exhibet logarithmum termini a ad poteſtatem $\pm m$ evecti. Præterea $\left(la^{n}\right)^{\pm m}$ indicat logarithmum termini a elevati ad poteſtatem n, qui logarithmus eſt & ipſe elevatus ad poteſtatem $\pm m$.

236. Propoſitio I. *Eſto potentia qualibet per a^{z} deſignata; dico, hujus logarithmum eſſe zla*; ſive $la^{z} = zla$.

Dem. Logarithmus poteſtatis a^{4} eſt 4 (233.); ſed radix a habet 1 pro logarithmo; ergo logarithmus poteſtatis a^{4} eſt aggregatum quatuor logarithmorum radicis a, ſeu $4la$. Pari ratione oſtendetur, logarithmum poteſtatis a^{7} eſſe $7la$; & generatim logarithmum poteſtatis a^{z}, ſeu $la^{z} = zla$. *Quod erat* &c.

237. *Coroll.* 1. In æquatione $a^{z} = y$, ſumptis logarithmis, provenit $zla = ly$; pariterque ſi detur $a^{\pm nz} = y^{\pm n}$, ut habeantur logarithmi, fiet $\pm nzla = ly^{\pm n}$.

238. *Coroll.* 2. Quoniam $la = 1$, erit $z = ly$, adeoque $a^{ly} = y$, itidemque $c^{lx} = x$. Profecto cujuſcumque poteſtatis exponens eſt poteſtatis ejuſdem logarithmus (233.).

239.

239. *Cor.* 3. Vicissim si $z = ly$, erit etiam $a^z = y$, posito a numero, cujus logarithmus est unitas.

240. *Cor.* 4. Si multiplicentur æquationes $a^{lx} = x$, $a^{ly} = y$, prodit $a^{lx+ly} = xy$ (53), adeoque $lx + ly = lxy$. *Ergo facti logarithmus habetur per factorum logarithmos simul additos.*

241. *Coroll.* 5. Similiter si dividatur $a^{lx} = x$ per $a^{ly} = y$, exurgit quotus $a^{lx-ly} = \frac{x}{y}$ (54), adeoque $lx - ly = l\,\frac{x}{y}$. Ergo *fractionis logarithmus habetur subtrahendo logarithmum denominatoris a numeratoris logarithmo.*

242. *Coroll.* 6. Quum potestatis $y^{\pm n}$ logarithmus sit $\pm nly$, liquet, *potentiarum cujuscumque generis formationes ad multiplicationes esse traductas.*

243. *Coroll.* 7. Potestatis imperfectæ, seu radicalis $y^{\pm\frac{1}{n}}$ logarithmus est $\pm\frac{1}{n}ly$; quod ostendit, *radicum extractionem in simplices divisiones esse commutatas.*

244. *Coroll.* 8. Fractionum logarithmi sunt negativi, numerorum integrorum affirmativi. Si enim detur $a^{\pm z} = y$, erit $\pm zla = ly$; sed $a^{-z} = \frac{1}{a^z}$

est

est numerus fractus; ergo &c. Ex quo apparet, quod si sumpto n pro numero integro affirmativo, fiat $a^{-z} = \frac{1}{n}$, erit $-zla = l\frac{1}{n}$; sin autem ponatur $a^{z} = n$, erit $zla = ln$; nimirum numerus integer n, & fractio $\frac{1}{n}$, cujus numerator est unitas, eundem habent logarithmum hoc tantum cum discrimine, quod integri logarithmus sit positivus, fractionis vero negativus. Et hic advertendum, esse $-l(\frac{a}{b}) = l(\frac{b}{a})$, nam $l(\frac{a}{b}) = la - lb$, adeoque $-l(\frac{a}{b}) = lb - la = l(\frac{b}{a})$.

245. *Coroll.* 9. Quodcumque sit logarithmorum systema, logarithmi diversarum ejusdem numeri seu radicis potestatum sunt invicem ut earundem potestatum exponentes; nam $ly^{m} : ly^{n} = mly : nly = m : n$.

246. *Coroll.* 10. Si quatuor numeri quocumque modo sumpti sint in proportione geometrica, eorum logarithmi erunt in proportione arithmetica, & vicissim. Sic numeri 2, 8; 16, 64 habent logarithmos 1, 3; 4, 6.

247.

247. *Coroll.* 11. Logarithmi exacti haberi nequeunt, nisi y sit potentia perfecta radicis a; sic si fiat $z = 2$, $y = 100$, erit $a^2 = 100$; $a = 10$, $la = l10$; si vero ponatur $z = 2$, $y = 7$, erit $a^2 = 7$, $a = 7^{\frac{1}{2}}$; $la = l7^{\frac{1}{2}}$; sed $7^{\frac{1}{2}}$, sive $\sqrt{7}$ haberi nequit in numeris, nisi per approximationem; ergo &c.

248. *Coroll.* 12. Si magnitudinis alicujus exponens ad aliquam potestatem & ipse sit evectus, seu quod idem est, aliquem habeat exponentem ut a^{v^x}, logarithmi eodem modo reperiuntur; ex. gr. sit $a^{v^x} = b^{y^z}$; fiet $v^x\, la = y^z\, lb$, & rursus $xlv + l.la = zly + l.lb$ (189.).

249. *Coroll.* 13. Vicissim si data logarithmorum æquatione $xlv + l.la = zly + l.lb$, ad numeros redire lubeat, habebis $a^{v^x} = b^{y^z}$.

250. *Scholion* I. Hactenus de logarithmis in genere; nunc ad duo peculiaria systemata, quorum usus in tota Mathesi est eximius, est transeundum, ad logarithmos nempe *vulgares*, & *hyperbolicos*. Logarithmi vulgares extant, ut notum est, in Tabulis; basis hujus systematis est $a = 10$, cujus idcirco logarithmus est unitas (234.), ita ut progressio geometrica evadat $\because 10^0, 10^1, 10^2, 10^3$, &c. seu $\because 1, 10, 100, 1000, 10000$, &c. At quum sint isti numeri in proportione decupla, oportebat pro praxi

numerorum intermediorum logarithmos cognoscere. Ad id assequendum singulis dictæ seriei exponentibus septem notæ decimales fuerunt adjectæ, quare series migravit in hanc $\div\!\!\div\ 10^{0,0000000}$, $10^{1,0000000}$, $10^{2,0000000}$, $10^{3,0000000}$, &c. ubi exponentes progressionem arithmeticam ut ante servant, adeoque singulæ decades ad potestates ab iisdem exponentibus indicatas evectæ erunt in progressione geometricæ, & exponentes isti earum logarithmi. Concipe jam, hos exponentes successive crescere una decies millionesima parte, seu $\frac{1}{10000000}$; hoc idem erit ac si inter binos quoscumque (puta inter 0,0000000, & 1,0000000) interserantur *9999999* termini medii arithmetici 0,0000000; 0,0000001; 0,0000002; 0,0000003, &c. quibus totidem respondebunt termini in progressione geometrica, & orietur progressio, quæ sic incipiet $\div\!\!\div\ 10^{0,0000000}$; $10^{0,0000001}$; $10^{0,0000002}$; $10^{0,0000003}$; &c. Liquet autem, terminos istos lentissime post unitatem crescere, primus enim $10^{0,0000000} = 1$, & valor termini decies millionesimi post primum est tantummodo 10; Aliquis igitur inter intermedios hosce terminos aderit, cujus

cujus valor 2, alius, cujus valor 3; alius, cujus valor 4, &c. Quapropter positis $A = 1,0000000$; $B = 10,0000000$; $lA = 0,0000000$; $lB = 1,0000000$, si numeri cujuslibet Z inveniendus sit logarithmus, quæratur inter A, & B medius geometricus $C = \sqrt{AB}$; Si non est $C = Z$, erit Z vel inter A, & C, vel inter C, & B; quæratur igitur inter has quantitates novus medius geometricus D, & sic deinceps, donec inveniatur medius geometricus æqualis numero Z. Interea cum habeo $C = \sqrt{AB}$, habeo etiam medium arithmeticum inter lA, & lB, nempe lC; cum habeo $D = \sqrt{AC}$, vel $= \sqrt{CB}$, habeo medium arithmeticum inter lA, & lC, vel inter lB, & lC, qui adæquat lD, & sic deinceps, donec ad logarithmum numeri Z perventum sit. Profecto si fiat $ly = z$, $lv = x$; erit $lvy = lv + ly$, & $lv^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} = l\sqrt{vy} = \frac{1}{2}lv + \frac{1}{2}ly = \frac{x+z}{2}$. Hoc artificio repertum est, terminum $10^{0,3010300}$ esse valorem numeri 2, seu $0,3010300 = l2$; terminum $10^{0,4771213}$ esse valorem numeri 3, seu $0,4771213 = l3$; & ita extructus fuit Canon logarithmorum vulgarium, idque non sine immenso labore, quia tunc nondum innotuerant series a summis viris Mercatore, Newtono, Hallejo, Leibnitio, aliisque postmodum publicatæ, quarum ope promptior, logarithmorum evadit inventio.

251. *Scholion* II. Exposita Canonis logarithmici vulgaris genesi, ejusque Tabulis diligenter inspectis, colligitur (1.°) tam illud, quam aliud quodcumque systema exhibere numerorum logarithmos compositos ex numero integro, qui *characteristica*, & fractione decimali, quæ *mantissa* dicitur; (2.°) Characteristica logarithmorum vulgarium tot constat unitatibus una minus, quot sunt figuræ integræ in dato numero; sic numeri 7000 quatuor figuris integris præditi logarithmus habet pro characteristica unitates $4 - 1 = 3$. Quapropter (3.°) Dato logarithmo quovis vulgari, ex characteristica dignoscitur, quot constet figuris numerus ipsi respondens; & vicissim dato numero quolibet, scitur sui logarithmi characteristica; (4.°) Aucta unitatibus *n* characteristica logarithmi alicujus numeri, habetur logarithmus ejusdem numeri aucti cyphris 0, quorum numerus *n*. Sic numerorum 7; 70; 700; 7000; &c. logarithmi sunt 0,8450980400; 1,8450980400; 2,8450980400; 3,8450980400, &c.

252. *Scholion* III. Ut autem præclarissimas logarithmorum proprietates huic systemati breviter adnectamus; quoniam unicuique logarithmo numerus in Tabulis e regione respondet, & vicissim; si multiplicandi sint numeri 166, & 48, addantur utriusque logarithmi 2,2201081, & 1,6812412, & summa 3,9013493 est logarithmus, cui convenit numurus 7968, qui factum indicat quæsitum. Si numerus 7968 sit per 166 dividendus, divisoris 166 logarithmus 2,2201081 subtrahatur a dividendi

7968

7968 logarithmo 3,9013493; & residuū 1,681241 1 est logarithmus, cui respondet quotus expetitus 48.

Si 7 sit elevandus ad quartam potestatem, ejus logarithmus 0,845098 ducatur in 4, & factum 3,380392 est logarithmus, cui competit numerus $2401 = 7^4$.

Si ex 2401 sit extrahenda radix biquadratica; dividatur numeri 2401 logarithmus 3,380392 per 4, & quotus 0,845098 est logarithmus radicis imperatæ 7.

Similiter datis duobus, vel tribus numeris, inveniri potest tertius, vel quartus geometrice proportionalis, nec non duorum numerorum medius geometricus haberi potest; quæ ex præcedentibus facillime inferuntur. Ex quibus omnibus unusquisque dignoscit, quantum levaminis adferat mira logarithmorum inventio in longis molestisque supputationibus, ubi errandi periculum semper imminet. Sic formulæ cujuslibet numericæ, puta $\frac{c^2 d\sqrt{c}}{f\sqrt[3]{gb}}$, valorem possumus per logarithmos maximo calculi ac laboris compendio reperire, ejus enim logarithmus $= 2lc + ld + \frac{1}{2}\,lc - lf - \frac{1}{3}\,lg - \frac{1}{3}\,lb$ detegit per numerum respondentem formulæ illius valorem quæsitum.

253. *Scholion* IV. Hic rursus demonstratur operatio, cujus ope potestatem quamcumque per aliam ejus-

ejusdem radicis multiplicamus aut dividimus. Exponentes enim potestatum in progressione arithmetica, potestates in geometrica procedunt. Sed illi sunt harum logarithmi; Ergo summa exponentium, quos habent potestates se mutuo multiplicantes, est exponens facti; differentia exponentium, quos habent potestates se mutuo dividentes, est exponens quoti.

Tandem ex hujus Propositionis Corollariis colligi potest, calculum Algebricum doctrinæ logarithmorum funditus esse superstructum, ut multiplicationis, ac divisionis potestatum ejusdẽ literæ, seu speciei (53. 54), nec non elevationis ad potestates, & radicum extractionis Regulæ (61. 77.) abunde testantur, ita ut Algebra etiam *Logystica* jure quidem meritoque possit appellari; in suis enim operationibus semper $l1 = o$ tacite adsumit. Ad aliquem vero logarithmorum usum, saltem in Œconomicis, addiscendum sit sequens.

254. Propositio II. *Si sorti* a, *cujus lucrum annuum pro nummorum numero* c *sit* $=$ b, *addatur quotannis lucrum, ita ut sors cum dicta conditione quotannis augeatur, summam post annorum numerum* n *invenire.*

Resolutio. Quoniam $c : c + b = a : \frac{(c+b)}{c} a$, erit sub finem anni primi nova sors $= \frac{(c+b)}{c} a$ pro anno secundo. Fiat rursus $c : c + b = \frac{(c+b)}{c} a : a \left(\frac{c+b}{c}\right)^2$; erit

erit sub finem anni secundi nova sors $= a\left(\frac{c+b}{c}\right)^2$ pro anno tertio. Pari modo sors pro anno quarto invenietur $a\left(\frac{c+b}{c}\right)^3$, & sic deinceps; quare generatim sub finem annorum n sors evadet $a\ 1+(\frac{b}{c})^n$. Ut autem valor hic expedite per logarithmos obtineatur, erit $la(1+\frac{b}{c})^n = la + nl(1+\frac{b}{c})$. Repertis igitur per Tabulas vulgares logarithmis $l(1+\frac{b}{c})$, & la, debitisque peractis operationibus, prodibit logarithmus, cujus numerus quæstioni satisfaciet. *Quod erat* &c.

Exemplum. Esto sors $=$ 1000 aureis, cujus annuus reditus præbeat 5 pro 100 aureis, & singulis annis lucrum pro nova sorte sorti antecedenti addatur; quæro ad quot aureos post 100 annos ascendat summa? In hac hypothesi erit $a = 1000$, $c = 100$, $b = 5$, $n = 100$, adeoque formula $nl(1+\frac{b}{c}) + la$ evadet $100\ l\ (1 + \frac{5}{100}) + l\,1000 =$

$$100\, l\left(\frac{21}{20}\right) + l1000 = 100(l21 - l20) + l1000.$$

Calculus igitur sic instituitur

$$\begin{aligned} l21 &= 1,3222193 \\ l20 &= 1,3010300 \\ \hline l21 - l20 &= 0,0211893 \\ 100(l21 - l20) &= 2,1189300 \\ l1000 &= 3,0000000 \\ \hline \text{log. quaesitus} &= 5,1189300 \\ \text{cujus numerus} &= 131501 \end{aligned}$$

summam exhibet expetitam.

255. *Scholion.* Aliquot superaddam operationum in formulis ad logarithmos reducendis *Exempla.*

1. $l\sqrt{x^2+z^2} = l(x^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\, l(x^2+z^2).$

2. $l\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2}\, l(a+x) + \frac{1}{2}\, l(a-x).$

3. $lv^3 + \frac{3}{4}\, lv = lv^3 . v^{\frac{3}{4}} = lv^3 \sqrt[4]{v^3}.$

4. $l\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(a+x)^3} = \frac{1}{2}\, l(a-x) + \frac{1}{2}\, l(a+x) - \frac{6}{2}\, l(a+x) = \frac{1}{2}\, l(a-x) - \frac{5}{2}\, l(a+x).$

5.

5. $\frac{l\,3x^{m+n} \times 5z^{\frac{r}{t}}}{2c^3} = l3 + (m+n)lx + l5 +$

$\frac{r}{t}lz - l2 - 3lc = l15 - l2 + (m+n)lx + \frac{r}{t}lz - 3lc.$

256. Propositio III. *Æquationes nonnullæ per logarithmos resolvuntur.*

I. Sit $\frac{a^{mx}}{b^{nx-1}} = c$. Erit $mxla + (1 - nx)lb = lc$;

hinc $mxla - nxlb = lc - lb$; & $x = \frac{lc - lb}{mla - nlb} = \frac{l\frac{c}{b}}{l\frac{a^m}{b^n}}$.

II. Sit $a^x = \frac{b^{mx+n}}{c^{rx}}$. Erit $xla = mxlb + nlb - rxlc$; quare $xla - mxlb + rxlc = nlb$; & $x = \frac{nlb}{la - mlb + rlc} = \frac{lb^n}{la + lc^r - lb^m} = \frac{lb^n}{l\frac{ac^r}{b^m}}$.

III. Sint duæ æquationes $x^x = a$, $x^{x+c} = b$. Ut valor incognitæ x habeatur, fiat in prima $xlx = la$; erit $lx = \frac{la}{x}$; In secunda vero $xlx + clx = lb$, adeoque

que $lx = \frac{lb}{x+c}$; ergo $\frac{la}{x} = \frac{lb}{x+c}$; hinc $xla + cla$

$= xlb$, seu $xlb - xla = cla$; ac tandem $x = \frac{cla}{lb-la}$.

257. Propositio IV. *Dato quolibet numero expresso per* $1+x$, *ejus logarithmum invenire.*

Resolutio. Statue $(1+x)^m = 1 + z$; erit $ml(1+x) = l(1+z)$.

Finge $l(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \&c.$

$l(1+z) = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \&c.$

erit $mAx + mBx^2 + mCx^3 + mDx^4 + mEx^5 + \&c. =$

$Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \&c.$

Quoniam vero pro m quicunque numerus unitate major sumi potest, ponatur facilitatis gratia $m = 2$, eritque $1 + 2x + xx = 1 + z$, & $2x + xx = z$. Substituendo igitur hunc valorem in locum ipsius z, fiet

$$2Ax + 2Bx^2 + 2Cx^3 + 2Dx^4 + 2Ex^5 + \&c. =$$

$$\begin{aligned} 2Ax &+ Ax^2 + 4Bx^3 + Bx^4 + 6Cx^5 \\ &+ 4Bx^2 + 8Cx^3 + 12Cx^4 + 32Dx^5 + \&c. \\ &+ 16Dx^4 + 32Ex^5 \end{aligned}$$

Jam quum utriusque membri hujus æquationis termini homologi, seu homogenei sint invicem æquales (quod quamvis pateat, suo loco demonstrabitur), terminis hisce inter se comparatis, quantitates indeterminatæ B, C, D, &c. innotescent, eritque

$A = A$, $A + 4B = 2B$, seu $B = -\frac{1}{2}A$; $4B +$

8C

$8C = 2C$, seu $C = \frac{1}{3}A$; $B + 12C + 16D = 2D$, seu $D = -\frac{1}{4}A$; $6C + 32D + 32E = 2E$, seu $E = \frac{1}{5}A$; &c. Hinc $l(1+x) = Ax + Bx^2 + Cx^3 +$ &c. $= A(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 -$ &c.)

Est autem A quantitas indeterminata; ergo idem numerus $1 + x$ infinitos logarithmos diversos pro vario quantitatis A (quæ *modulus* dicitur) valore, habere potest. Sed logarithmicum systema magis naturale, ac simplex est illud, in quo ponitur $A = 1$; ergo *naturales* jure appellantur illi logarithmi, qui fuerunt in hac hypothesi computati, quique *hyperbolici* quoque nuncupantur, quod eorum ope hyperbolæ exprimitur quadratura. De istis deinceps loqui, nisi aliter præmoneamus, animo intendimus.

258. *Cor.* 1. Quum sit $l(a+x) = l(a \times \overline{1 + \frac{x}{a}}) = la + l(1 + \frac{x}{a})$, si pro x in serie inventa ponamus $\frac{x}{a}$ (nam pro x quæcumque quantitas etiam ad quamlibet potestatem elata subrogari potest) habebimus $l(a+x)$ $=$

$= la + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} +$ &c.: quod si negative accipiamus x, fiet $l(a-x) = la - \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} -$ &c. Ergo $l(a+x) - l(a-x)$, sive $l\frac{a+x}{a-x} = \frac{2x}{a} + \frac{2x^3}{3a^3} + \frac{2x^5}{5a^5} + \frac{2x^7}{7a^7} +$ &c. $= \frac{2x}{a}(1 + \frac{x^2}{3a^2} + \frac{x^4}{5a^4} + \frac{x^6}{7a^6} +$ &c.), quæ series est convergens; ut enim $\frac{a+x}{a-x}$ maneat quantitas affirmativa, esse debet x semper minor quam a.

259. *Coroll.* 2. Quoniam $l(1 \pm x)^n = n\,l(1 \pm x)$, erit $l(1 \pm x)^n = n(\pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm$ &c.).

260. *Coroll.* 3. Si pro n ponatur $\frac{1}{n}$, prodit

$$l(1+x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{\&c.})$$

$$l(1-x)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \text{\&c.})$$

Hinc

Hinc $l(1+x)^{\frac{1}{n}} + l(1-x)^{\frac{1}{n}} = l(1-xx)^{\frac{1}{n}} =$

$\frac{1}{n} l(1-xx) = \frac{1}{n}(-\frac{2}{2}x^2 - \frac{2}{4}x^4 - \frac{2}{6}x^6 - \&c.)$

$= \frac{1}{n}(-x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \&c.)$

Ergo *dato sinu, invenietur ejus logarithmus*; posito enim radio $= 1$, cosinu $= x$, erit sinus $= \sqrt{1-xx}$, & $l\sqrt{1-xx} = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \&c.$

261. *Coroll.* 4. Similiter *data tangente, invenitur ejus logarithmus*. Etenim posito sinu toto, seu *tang* $45^\circ = 1$, tangens arcus majoris quam 45° erit $= 1 + x$, tangens arcus minoris quam 45° erit $1 - x$; proinde in casu priore tangentis logarithmus erit $= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.$ in casu posteriore $= -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \&c.$

262. *Coroll.* 5. Si statuatur x quantitas infinite parva, erit $l(a+x) = ax - \frac{1}{2}a^2x^2 + \frac{1}{3}a^3x^3 - \&c.$ Sed x^2, x^3, &c. præ x evanescunt; ergo in hac hypothesi $l(1+ax) = ax$.

263. *Scholion* I. Expedit, ut seriem convergentem superius expositam $\frac{2x}{a}\left(1+\frac{x^2}{3a^2}+\frac{x^4}{5a^4}+\frac{x^6}{7a^6}\right.$ $\left.+\&c.\right)=l\frac{a+x}{a-x}$ ad logarithmorum calculum accommodemus. Itaque ponamus $\frac{a+x}{a-x}=\frac{z}{z-1}$; erit $(z-1)(a+x)=z(a-x)$, & $\frac{x}{a}=\frac{1}{2z-1}$, adeoque substituendo, proveniet $l\frac{z}{z-1}$, seu $lz-$ $l(z-1)=\frac{2}{2z-1}\left(1+\frac{1}{3(2z-1)^2}+\frac{1}{5(2z-1)^4}\right.$ $\left.+\frac{1}{7(2z-1)^6}+\&c.\right)$; ergo $lz=l(z-1)+\frac{2}{2z-1}\left(1+\right.$ $\left.\frac{1}{3(2z-1)^2}+\frac{1}{5(2z-1)^4}+\frac{1}{7(2z-1)^6}+\&c.\right)$; ubi advertendum, quod ut habeatur logarithmus numeri z, oportet prius habere logarithmum numeri $z-1$, adeoque primo statuendum erit $z=2$, quia tunc $l(z-1)=l1=0$, & reliqua seriei portio facillime per substitutionem obtinetur; quod si deinde quæratur numerus 3, tunc erit $l(z-1)=l2$, qui

qui jam innotescit; quare habetur etiam lz, si fuerit $z = 7$, quod $l(z-1) = l6$, qui reperietur per aggregatum $l2 + l3 = l2.3 = l6$. Si ponatur $z = 5$, fiet $l(z-1) = l4 = 2l2$, & sic deinceps. Quæri ex. gratia debeat logarithmus hyperbolicus numeri 2.

Erit $z = 2$, quamobrem $l2 = \frac{2}{3}(1 + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{5 \cdot 3^4} + \frac{1}{7 \cdot 3^6} + \frac{1}{9 \cdot 3^8} + \&c.) = 0,69314718$ &c.
Similiter si optetur logarithmus hyperbolicus numeri 5, erit $z = 5$, quocirca $l5 = 2l2 + \frac{2}{9}(1 + \frac{1}{3 \cdot 9^2} + \frac{1}{5 \cdot 9^4} + \&c.) = 1,60943791$ &c.

264. *Scholion* II. Hic rursus demonstrari potest, esse $1^{m+n\sqrt{-1}} = 1$. Ponendo enim e pro logarithmorum hyperbolicorum basi, seu pro numero, cujus logarithmus est unitas, stabit $1^{m+n\sqrt{-1}} = e^{l1\,(m+n\sqrt{-1})}$, quod verissimum sumptis logarithmis reperietur; sed $l1 = 0$; ergo $e^{l1\,(m+n\sqrt{-1})} = e^0$, adeoque $1^{m+n\sqrt{-1}} = e^0 = 1$.

265. Propositio V. *Modulum in quolibet logarithmorum systemate determinare.*

Resolutio. Inventis logarithmis hyperbolicis, facillimum est ceteros logarithmos in quocumque systemate investigare, dummodo modulus A determinetur. Pro quo si calculos præcedentes respiciamus, patebit, ut monuimus, positum ibi fuisse $A=1$, quapropter valor respondens quantitati lz, qui per unitatem pro A multiplicatus adsumptus fuit, debet per A multiplicari, ut systematis generalis expressio requirit. Posito igitur z pro numero, cujus logarithmus est unitas, (qui numerus basis systematis, ut diximus, appellatur) inveniatur ejusdem z logarithmus hyperbolicus $= L$, quo ducto in modulum A, fiet $lz = AL$, ac proinde habebitur

$$A = \frac{lz}{L}, \text{ seu } A = \frac{1}{L}.$$ *Quod erat &c.*

Exemplum. Esto $z=10$; Ergo $lz = l10 = 1$, & z est basis systematis logarithmorum in Tabulis vulgaribus extantium. Inveniatur logarithmus hyperbolicus numeri 10, nimirum $l2 + l5 = l10 =$

$2,30258509$ &c. $= L$; hinc $A = \frac{1}{L} = \frac{1}{2,30258509\ \&c.}$ $= 0,43429448 \ldots$ &c.

266. *Coroll.* Quum sit $lz = AL$; *ut Logarithmi hyperbolici ad Tabulares reducantur; oportet logarithmos hyperbolicos per* $0,43429448 \ldots$ &c. *multiplicare*; & vicissim *ut logarithmi Tabulares in hyperbolicos convertantur, oportet logarithmos Tabulares per* $2,30258509$ &c. *multiplicare*; est enim $L = \frac{lz}{A}$.

Ista

Ista duo tantum systemata in usu n vocantur, quapropter de reliquis non sumus solliciti.

267. Propositio VI. *Dato logarithmo, numerum ei respondentem invenire.*

Resolutio. Si logarithmus datus est aliquis ex vulgaribus, reducatur ad logarithmos hyperbolicos (266), tunc enim nulla alia superest difficultas, quam invenire numerum, qui logarithmo hyperbolico jam reperto respondeat.

Jam vero logarithmus iste hyperbolicus statuatur $= z$, & $1 + x$ sit numerus quæsitus; erit igitur

$$z = l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \&c.$$

Ut incognitæ x valor habeatur per z, ponatur $x = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \&c.$ substitutisque valoribus in prima æquatione, fiet

$$z, \text{seu } z + 0 + 0 + 0 + \&c. = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 - \frac{1}{2}A^2z^2 - ABz^3 - \frac{1}{2}B^2z^4 - ACz^4 + \frac{1}{3}A^3z^3 + A^2Bz^4 - \frac{1}{4}A^4z^4 + \&c.$$

Ergo terminis homologis comparatis habetur $Az = z$, seu $A = 1$; $B - \frac{1}{2}A^2 = 0$, seu $B = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}A^2 = \frac{1}{2}$; $C - AB + \frac{1}{3}A^3 = 0$, seu $C = AB - \frac{1}{3}A^3 = \frac{1}{6}$; $D = \frac{1}{2}B^2 + AC - A^2B + \frac{1}{4}A^4 = \frac{1}{24}$; &c.

Itaque $x = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{z^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} +$ &c.

Sed numerus quæsitus est $1 + x$; ergo $1 + x = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{2 \cdot 3} + \frac{z^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{z^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} +$ &c. Quum autem sit $z = l(1 + x)$; si fiat $1 + x = n$, erit $z = ln$; quare generatim numerus quilibet $n = 1 + ln + \frac{(ln)^2}{2} + \frac{(ln)^3}{2 \cdot 3} + \frac{(ln)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} +$ &c. quæ series semper convergens problema resolvet.

268. *Coroll.* 1. Si fiat $l(1 + x) = vle$, erit $1 + x = e^v$ (239.); sed $1 + x = n = 1 + \frac{ln}{1} + \frac{(ln)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(ln)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$ &c. ergo substituendo habetur $e^v = 1 + \frac{vle}{1} + \frac{v^2(le)^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^3(le)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$ &c. qua-

re si fuerit e numerus, cujus logarithmus sit unitas, tunc ob $le = 1$, prodit $e^v = 1 + \frac{v}{1} + \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$ &c. pariterque $e^{-v} = 1 - \frac{v}{1} + \frac{v^2}{1 \cdot 2} - \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} +$ &c.

269. *Coroll.* 2. Quamobrem $\frac{e^v + e^{-v}}{2} = 1 + \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} +$ &c., & $\frac{e^v - e^{-v}}{2} = \frac{v}{1} + \frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{v^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{v^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} +$ &c.

270. *Coroll.* 3. Hinc si pro v ponatur $z\sqrt{-1}$, stabit $\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} = 1 - \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{z^6}{1 \cdot 2 \ldots\ldots 6} +$ &c.

271. *Coroll.* 4. Quod si rursus pro v substituatur $z\sqrt{-1}$, & formula $\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{z\sqrt{-1}}}{2}$ dividatur per

 $\sqrt{-1}$,

$\sqrt{-1}$, fiet $\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = z - \frac{z^3}{1.2.3} +$

$\frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3......7} +$ &c.

Exemplum. Quæratur basis logarithmorum hyperbolicorum, seu numerus, in quo logarithmus hyperbolicus est $= 1$. Habemus igitur

$$n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \&c.$$

Ex quo elicitur $n = 2,71828183...$ cujus numeri in calculo integrali frequentior est usus.

272. Propositio VII. *Logarithmi duorum numerorum in uno systemate sunt logarithmis eorundem numerorum in alio quovis systemate geometrice proportionales.*

Dem. Esto m logarithmus numeri A, & n logarithmus numeri B in systemate baseos a. Vi æquationis $y = a^m$, erit $A = a^m$, nec non $B = a^n$ (238.). Elevetur prima æquatio ad potestatem n, secunda ad potestatem m; fiet $A^n = a^{mn}$, $B^{\frac{m}{}} = a^{mn}$, nimirum $A^n = B^m$, seu $A = B^{\frac{m}{n}}$. Similiter positis m' logarithmo numeri A, n' logarithmo numeri B in quocumque alio systemate baseos b, reperietur $A = B^{\frac{m'}{n'}}$; ergo $B^{\frac{m}{n}} = B^{\frac{m'}{n'}}$, adeoque $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$; unde habe-

betur $m:n = m':n'$, nec non $n' = \frac{m'}{m} \times n$. *Quod erat* &c.

273. *Coroll.* Datis igitur duorum numerorum A, B logarithmis in systemate hyperbolico, cujus basis, ut vidimus, est 2,71828183....., invenietur logarithmus hyperbolicus numeri B, & vicissim, quia baseos logarithmicæ in quocumque systemate logarithmus est unitas (234.).

Hic sese rursus offerunt expressiones imaginariæ ad formulam $A + B\sqrt{-1}$, vel aliam consimilem facillime reducendæ, nimirum.

274. Propositio VIII. *Esto* $(m + n\sqrt{-1})^v$; *dico fore* $l(m + n\sqrt{-1})^v = A + B\sqrt{-1}$.

Dem. Ex dictis (236.) habemus $l(m + n\sqrt{-1})^v = vl(m + n\sqrt{-1}) = vl\left(1 + \frac{n\sqrt{-1}}{m} \times m\right) = vl\left(1 + \frac{n\sqrt{-1}}{m}\right) + vlm$. Sed $l(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \mp$ &c. (257.); ergo si ponatur $x = \frac{n\sqrt{-1}}{m}$, proveniet $l\left(1 + \frac{n}{m}\sqrt{-1}\right) =$

$n\sqrt{}$

$\frac{n\sqrt{-1}}{m} + \frac{n^2}{2m^2} - \frac{n^3\sqrt{-1}}{3m^3} + \&c. = \frac{n^2}{2m^2} + \&c.$ $+ \frac{n}{m}\sqrt{-1} - \frac{n^3}{3m^3}\sqrt{-1} - \&c.$ Statue $\frac{n}{2m^2} + \&c.$ $+ lm = M$; $(\frac{n}{m} - \frac{n^3}{3m^3} - \&c.)\sqrt{-1} = N\sqrt{-1}$; fiet $l(1 + \frac{n}{m}\sqrt{-1}) + lm = M + N\sqrt{-1}$. Hinc $vl(1 + \frac{n}{m}\sqrt{-1}) + vlm = v(M + N\sqrt{-1})$. Esto demum $vM = A$, $vN = B$, prodibit $v(M + N\sqrt{-1})$ $= l(m + n\sqrt{-1})^v = A + B\sqrt{-1}$. *Quod erat* &c.

275. *Coroll.* 1. Si fuerit $v = 1$, erit $l(m + n\sqrt{-1})$ $= A + B\sqrt{-1}$, ad quam itidem formulam reducetur $l(m + n\sqrt{-1})^v$, si fuerit v quantitas integra, vel fracta, positiva, aut negativa.

276. *Cor.* 2. Generatim si ponatur $v = p + q\sqrt{-1}$, fiet $l(m + n\sqrt{-1})^{p + q\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$; tunc enim $v(M + N\sqrt{-1}) = (p + q\sqrt{-1})(M + N\sqrt{-1})$ $= pM - qN + (pN + qM)\sqrt{-1}$; quare si fingas $pM - qN = A$, $(pN + qM)\sqrt{-1} = B\sqrt{-1}$, emerget $l(m + n\sqrt{-1})^{p + q\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$.

277. *Coroll.* 3. Si proponatur $l(m+n\sqrt{-1})^v$; quoniam $l(m+n\sqrt{-1})^v = A + B\sqrt{-1}$, erit $l(m+n\sqrt{-1})^{v^x} = (A+B\sqrt{-1})^x = a+b\sqrt{-1}$, atque ita semper. Similiter quum statui possit $l(m+n\sqrt{-1}) = y+z\sqrt{-1}$, erit quoque $l(y+z\sqrt{-1}) = \alpha+\beta\sqrt{-1}$; sed $l(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = M+N\sqrt{-1}$; ergo $l.l(m+n\sqrt{-1}) = M+N\sqrt{-1}$. Pari ratione ostendetur $l.l.l(m+n\sqrt{-1}) = A+B\sqrt{-1}$; & sic in infinitum.

278. Propositio IX. *Ajo, esse* $(m+n\sqrt{-1})^v = A+B\sqrt{-1}$.

Dem. Quum enim data quantitate logarithmica $l(1+x)$, habeatur (267.) ejus numerus $1+x = 1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{2\cdot 3}+\frac{z^4}{2\cdot 3\cdot 4}+$ &c. statuendo $z = l(1+x)$; si quantitatis propositæ accipiatur logarithmus $vlm+vl(1+\frac{n}{m}\sqrt{-1})$, fiatque ut supra $x = \frac{n}{m}\sqrt{-1}$, erit $z = l(1+\frac{n}{m}\sqrt{-1})$, quæ per Proposit. antec. reduci potest ad expressionem $a+b\sqrt{-1}$. Ergo quantitatis $vl(1+\frac{n}{m}\sqrt{-1})+$

vlm

$vlm = vl\overline{(1+\frac{n}{m}\sqrt{-1} \times m)}$ numerus $=$
$(m+n\sqrt{-1})^v = mv(1+a+b\sqrt{-1}+\frac{\overline{a+b\sqrt{-1}}^2}{2}+\&c.) = mv+amv+bmv\sqrt{-1}+\frac{1}{4}a^2mv+\frac{1}{2}abmv\sqrt{-1}-\frac{1}{4}b^2mv+\&c.$ Itaque si sumas $mv+amv+\frac{1}{4}a^2mv-\frac{1}{4}b^2mv+\&c. = A$; $bmv\sqrt{-1}+\frac{1}{2}abmv\sqrt{-1}+\&c. = B\sqrt{-1}$, habebis $(m+n\sqrt{-1})^v = A+B\sqrt{-1}$; *Quod erat* &c.

279. *Coroll.* 1. Si v sit quantitas positiva aut negativa, integra vel fracta, realis vel imaginaria, velut $v = p+q\sqrt{-1}$, consimilis reductio semper locum obtinebit, ut etiam ex nuper dictis apertum est.

280. *Coroll.* 2. Eodem modo si fuerit $v = (p+q\sqrt{-1})^{x+y\sqrt{-1}}$, fiet $m+n\sqrt{-1}^{(p+q\sqrt{-1})^{x+y\sqrt{-1}}} = A+B\sqrt{-1}$; quum enim statui possit $(p+q\sqrt{-1})^{x+y\sqrt{-1}} = \alpha+\beta\sqrt{-1}$, erit quoque $(m+n\sqrt{-1})^{\alpha+\beta\sqrt{-1}} = A+B\sqrt{-1}$; & sic in infinitum.

281.

281. Propositio X. *Dico, esse* $(n\sqrt{-1})^v = A + B\sqrt{-1}$.

Dem. Ex demonstratis (267.) habemus $(n\sqrt{-1})^v = 1 + vl(n\sqrt{-1}) + \frac{v^2}{2}\,l(n\sqrt{-1})^2 + \frac{v^3}{2\cdot 3}\,l(n\sqrt{-1})^3 +$ &c. quam seriem, liquet, reduci posse ad expressionem $A + B\sqrt{-1}$. *Quod erat* &c.

282. *Coroll.* 1. Hinc profluunt corollaria iis, quæ duas antecedentes postremas propositiones consequuntur, consimilia.

283. *Coroll.* 2. Si fuerit $n = 1$, poterit itidem reduci $(\sqrt{-1})^v$ ad formam $A + B\sqrt{-1}$; quapropter ad formam consimilem reducetur quoque $n(\sqrt{-1})^v$.

284. *Coroll.* 3. Habemus $(\sqrt{-1})^v = (-1)^{\frac{1}{2}\times v}$. Hinc si fiat $v = \frac{1}{t}$, erit $(\sqrt{-1})^v = (-1)^{\frac{1}{2t}} = \sqrt[2t]{-1}$; adeoque $\sqrt[2t]{-1} = A + B\sqrt{-1}$; ac proinde ad consimilem expressionem reducetur etiam $n\sqrt[2t]{-1}$.

285. *Coroll.* 4. Ad consimilem quoque formam redigitur $l(n\sqrt{-1})^v$. Etenim $(n\sqrt{-1})^v = A+B\sqrt{-1}$; sed $l(A+B\sqrt{-1}) = M+N\sqrt{-1}$ (275.); ergo $l(n\sqrt{-1})^v = M+N\sqrt{-1}$; adeoque si fiat $n=1$, erit etiam $l(\sqrt{-1})^v = M+N\sqrt{-1}$, & $nl(\sqrt{-1})^v = a+b\sqrt{-1}$.

286. *Coroll.* 5. Quoniam $n\sqrt[2r]{-1} = M+N\sqrt{-1}$ (284.), & $l(M+N\sqrt{-1}) = a+b\sqrt{-1}$, erit $l(n\sqrt[2r]{-1}) = a+b\sqrt{-1}$. Quum autem sit $l(m+n\sqrt[2r]{-1})^v = vl(m+M+N\sqrt{-1})$, manifestum est, etiam $l(m+n\sqrt[2r]{-1})^v$ ad expressionem $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ redigi posse; quod similiter statui potest de formula $(m+n\sqrt[2r]{-1})^v = (m+M+N\sqrt{-1})^v$.

Tres praecedentes postremas Propositiones cum suis Corollariis non alieno de fonte hausimus, sed proprio marte, etiam antequam quid simile nobis alibi videre contigerit, invenimus, & Amicis, nonnullisque ex nostris Auditoribus communicavimus.

CA-

CAPUT V.

DE ÆQUATIONUM PRIMI GRADUS RESOLUTIONE.

Definitiones.

287. PRoblema resolvere idem est ac singularum, quas continet, incognitarum valorem invenire.

288. Problemata Arithmetica ad tres Classes revocantur; alia enim dicuntur *Determinata*, alia *Indeterminata*, alia *Plusquam determinata*.

289. *Determinata* vocantur illa, in quibus æquationum numerus ex conditionibus attente consideratis emergens est incognitarum numero *æqualis*.

290. *Indeterminata*, in quibus hujusmodi æquationum numerus est incognitarum numero *minor*.

291. *Plusquam determinata*, in quibus æquationum numerus est incognitarum numero *major*. Horum problematum aliqua conditio interdum est inutilis, plerumque impossibilis. Sic si quærantur duo numeri, quorum summa sit 10, differentia 6, productum 60, isti quoad summam & differentiam erunt 8, & 2; sed conditio adjecta quoad eorum productum 60 est impossibilis, adeoque impossibilis problematis resolutio; sin autem productum illud esse debeat 16, conditio est inutilis, ut patet.

MO-

MONITA.

292. Cum Problema est determinatum, singulis incognitis præter unam exterminatis, ad eandem fit reductio; qua cognita, reliquæ pariter innotescunt.

293. Cum vero Problema est indeterminatum, necesse est, ut nonnullæ quantitates remaneant incognitæ; quibus ad arbitrium determinatis, problema ad determinatum reducitur.

294. Ut autem Problematum solutiones rite adsequamur, animus ad sequentia diligenter intendendus.

I. Propositam quæstionem accuratissime in omnibus suis partibus examinare oportet, ejusque sensum recte percipere.

II. Ceteris terminis, quibus quæstio enunciatur, velut superfluis neglectis, ad id tantummodo, quod est quantitas, vel quantitatis relatio, mens convertatur.

III. Quæstiones propositæ sensus, ut ad algebricum artificium fiat accommodatior, ordine diverso, si opus fuerit, exponatur.

IV. Incognitarum numerus non est sine necessitate multiplicandus. Sic si quantitas aliqua incognita per x designetur, alia ejus multiplex, vel submultiplex non per y, aut per z, &c. sed per mx, aut per $\frac{1}{m}x$ erit exprimenda. Itidem si quantitas quævis a in duas partes incognitas divisa intelligatur, altera erit x, altera $a-x$; & si quantitati a portio in-

incognita y addatur, quantitas tota erit $a+y$. Si duæ quantitates a, y, (quarum media proportionalis y sit incognita) progredi debeant in proportione continua, tertius terminus erit $\frac{yy}{a}$, quartus $\frac{y^3}{a^2}$; &c.

V. Generatim cum problemata plures continent incognitas, tres ad illa resolvenda methodi possunt adhiberi; (1.ª) per valorum incognitæ substitutionem; (2.ª) per duorum ejusdem incognitæ valorum mutuam comparationem; (3.ª) per æquationum additionem, aut subtractionem; quarum usus in sequentibus occurret.

295. Prop. I. *Militiæ pars quarta fugit, pars quinta perempta est,*
Captivasque dedit portio sexta manus.
Dux numerans reliquos, reperit bis mille trecentos;
Quæro, quot ad pugnam duxerit ante viros?

Resolutio. Virorum, quos Dux in aciem primo disposuerat, numerus sit $= x$; ergo æquatio erit $x = 2300 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x$, & fractionibus ad eundem denominatorem redactis, $x = 2300 + \frac{74x}{120}$; & per *antithesim* $x - \frac{74x}{120} = 2300$, seu

$\frac{120x - 74x}{120} = \frac{23x}{60} = 2300$; hinc $x = \frac{60.2300}{23} =$

6000; $\frac{1}{4}x = 1500$; $\frac{1}{5}x = 1200$; $\frac{1}{6}x = 1000$.

Quare huic quæſito, quod ita carminibus exornatum a cl. D. Guidone Grando quondam accepimus, quodque hic in venerationem tanti Viri propoſuimus, ita reſponderi fortaſſe potuiſſet :

Dux ſecum ſex mille viros in prælia primum
Duxit : captivas mille dedere manus ;
Sunt in conflictu bis centum & mille perempti,
Et ter quingenti corripuere fugam.

296. Propoſitio II. *Duo Amici pecuniam, quam ſeorſum poſſidebant, in unam ſummam communem a redigunt ; interea primus quantitatem* $\frac{1}{b}$ *ſuæ portionis, alter ſuæ portionis quantitatem* $\frac{1}{c}$ *impendunt ; uterque autem ſimul ſummam* d *; quæruntur utriuſque portiones, & impenſæ.*

Reſolutio. Sit primi portio quæſita $= x$, portio alterius erit $a - x$; ergo primi impenſa $= \frac{x}{b}$, alterius $= \frac{a-x}{c}$, quarum ſumma $= \frac{x}{b} + \frac{a-x}{c} = d$;

qua-

quare facta ad eundem denominatorem reductione, erit $\frac{ab - bx + cx}{bc} = d$; adeoque $cx - bx = bcd - ab$; $x = \frac{bcd - ab}{c - b}$, sive $x = \frac{ab - bcd}{b - c}$, quæ est portio primi; $a - x = a - \frac{bcd + ab}{c - b} = \frac{ac - ab - bcd + ab}{c - b} = \frac{ac - bcd}{c - b}$, sive $a - x = \frac{bcd - ac}{b - c}$, quæ est portio secundi; hinc impensæ; primi enim est $\frac{cd - a}{c - b}$, alterius $\frac{a - bd}{c - b}$. *Quod erat &c.*

Sit in casu particulari $a = 45$, $b = 3$, $c = 5$, $d = 11$, erit $x = \frac{165 - 135}{2} = 15$; & $a - x = \frac{225 - 165}{2} = 30$; ergo si de nummis aureis sermo sit, primi portio constat aureis 15, alterius 30; primi itaque impensa est aureorum 5, alterius 6, quorum summa conficit 11; summa integra 45; prorsus, ut problematis conditiones requirunt.

297. Propositio III. *Sint plures incognitæ signis diversis affectæ, ac totidem æquationes; singulas incognitas investigare.*

Resolutio. I. Sint duæ incognitæ altera major $= x$, altera minor $= y$, sitque $x + y = a$, & $x - y = b$. Addantur æquationes, fiet $x + y + x - y = 2x = a + b$; unde $x = \frac{a + b}{2}$. Subtrahantur; fiet $x + y - x + y = 2y = a - b$; ex quo $y = \frac{a - b}{2}$.

II. Sint tres æquationes, ac tres incognitæ, scilicet $x + y - z = a$; $x + z - y = b$; $y + z - x = c$. Fiant æquationes ad x; prodibit $x = a + z - y$; $x = b + y - z$; $x = y + z - c$. Comparetur prima cum secunda æquatione, nimirum $a + z - y = b + y - z$; proveniet $2z - 2y = b - a$. Comparetur deinde prima æquatio cum tertia; ac fiet $a + z - y = y + z - c$; unde $2y = a + c$, & $y = \frac{a + c}{2}$; quo valore suffecto in æquatione $2z - 2y = b - a$, prodit $z = \frac{b + c}{2}$; facillime igitur habetur incognitæ x valor $= \frac{a + b}{2}$.

III. In reliquis casibus, ubi nempe incognitæ sint plus quam tres, simulque totidem æquationes, similiter procedendum.

298. Propositio IV. *Sint incognitæ numero* n, *quarum per numerum* n − 1 *omnimodis sumptarum aggregata innotescant; singulas incognitas invenire.*

Re-

Resolutio I. Tres incognitæ sint x, y, z; ergo (per conditionem problematis) $x + y = a$; $x + z = b$; $y + z = c$. Statue $p = x + y + z$; erit $p - a = x + y + z - a = x + y + z - x - y = z$, adeoque simili ratione habemus

$$\left\{\begin{array}{l} p - a = z \\ p - b = y \\ p - c = x \\ \hline \end{array}\right\}$$

Summa $3p - a - b - c = x + y + z = p$;

ex quo $\left\{\begin{array}{l} 2p = a + b + c \\ p = \dfrac{a + b + c}{2} \end{array}\right\}$ quare $\left\{\begin{array}{l} p - a = z = \dfrac{a + b + c - 2a}{2} = \dfrac{b + c - a}{2} \\ p - b = y = \dfrac{a + b + c - 2b}{2} = \dfrac{a + c - b}{2} \\ p - c = x = \dfrac{a + b + c - 2c}{2} = \dfrac{a + b - c}{2} \end{array}\right\}$.

II. Quatuor incognitæ sint v, x, y, z. En calculi typum; $v + x + y = a$; $v + x + z = b$; $v + y + z = c$; $x + y + z = d$; Fiat $p = v + x + y + z$; habebitur

$$\left\{\begin{array}{l} p - a = z \\ p - b = y \\ p - c = x \\ p - d = v \\ \hline 4p - a - b - c - d = p \\ 3p = a + b + c + d \\ p = \dfrac{a + b + c + d}{3} \end{array}\right\} \text{Hinc} \left\{\begin{array}{l} p - a = z = \dfrac{a + b + c + d}{3} - a = \dfrac{b + c + d - 2a}{3} \\ p - b = y = \dfrac{a + b + c + d}{3} - b = \dfrac{a + c + d - 2b}{3} \\ p - c = x = \dfrac{a + b + c + d}{3} - c = \dfrac{a + b + d - 2c}{3} \\ p - d = v = \dfrac{a + b + c + d}{3} - d = \dfrac{a + b + c - 2d}{3} \end{array}\right\}$$

III. Facile igitur eruitur methodus generalis pro quolibet incognitarum numero consimilibus conditionibus subjecto. Indicet enim n incognitarum hujusmodi numerum; erit $np - a - b - c - d - e \ldots$ &c. $= p$, proinde $(n - 1)\, p = a + b + c + d + e \ldots\ldots$ &c. quarum diversarum cognitarum numerus esse debet æqualis numero n, vel numero incognitarum

 pro-

problema propositum ingredientium; quapropter $p = \frac{a+b+c+d+e\ldots\ \&c.}{n-1}$ erit formula generalis, ex qua singularum incognitarum valores sunt eliciendi, nempe

$$p-a = \frac{b+c+d+e\ldots-(n-2)a}{n-1};$$

$$p-b = \frac{a+c+d+e\ldots-(n-2)b}{n-1};$$

$$p-c = \frac{a+b+d+e\ldots-(n-2)c}{n-1};$$

&c. quarum formularum lex statim in conspectum venit; Quod erat &c.

Exemplum. Incognitæ sint sex, s, t, v, x, y, z, ita ut innotescat, esse

$$\left\{\begin{array}{l} s+t+v+x+v=a \\ s+t+v+x+z=b \\ s+t+v+y+z=c \\ s+t+x+v+z=d \\ s+v+x+y+z=e \\ t+v+x+y+z=f \end{array}\right\} \text{erit } n=6, \text{ quare } \left\{\begin{array}{l} p-a=\frac{b+c+d+e+f-4a}{5}=z \\ p-b=\frac{a+c+d+e+f-4b}{5}=y \\ p-c=\frac{a+b+a+e+f-4c}{5}=x \\ p-d=\frac{a+b+c+e+f-4d}{5}=v \\ p-e=\frac{a+b+c+d+f-4e}{5}=t \\ p-f=\frac{a+b+c+d+e-4f}{5}=s \end{array}\right\}$$

Facile autem dignoscitur, esse $p-a=z$, quia z deficit in æquatione $s+t+v+x+y=a$, & sic de reliquis.

299. Propofitio V. *Datis pluribus æquationibus primi gradus, ac totidem incognitis per cognitas multiplicatis, fingularum incognitarum valores invenire.*

Refolutio. Duabus ex æquationibus propofitis fumptis ad arbitrium, termini incognitam illam, quam eliminare cupimus includentes ad identitatem redigantur; deinde inter eafdem affumptas æquationes fiat fumma, vel fubtractio, prout opus fuerit, ut ex duabus æquationibus una tantum fuperfit, quæ una et datis incognitis carebit; tum idem peragatur cum una ex duabus jam tractatis æquationibus, & una ex intactis ad arbitrium acceptis, & ita porro. Quoniam autem tam æquationes fic prodeuntes, quam incognitæ illis comprehenfæ femper fiunt una fucceffive minores quam illæ, unde oriuntur, deveniendum tandem eft ad unam tantum æquationem, unamque incognitam, quæ proinde cognita evadet. Quod fi eadem operatio quoad alias incognitas pari ratione inftituatur, ceteræ etiam incognitæ cognitæ fingulæ fient; Quod erat &c. Res fiet Exemplis illuftrior.

Exemplum I. Æquationes propofitæ fint duæ, nempe $ax + by = c$; $a'x - b'y = c'$. Ut y eliminetur, termini by, $b'y$ funt ad identitatem reducendi; pro quo prima æquatio multiplicetur per b', fecunda per b; eritque $\left\{\begin{array}{l} ab'x + bb'y = b'c \\ a'bx - bb'y = bc' \end{array}\right\}$ & fummando, $[ab' + a'b]x = b'c + bc'$; unde $x = \dfrac{b'c + bc'}{ab' + a'b}$.

Ut x evanefcat, prima æquatio multiplicetur per a', fecunda per a; & fiet $\left\{\begin{array}{l} aa'x + a'by = a'c \\ aa'x - ab'y = ac' \end{array}\right\}$, & al-

 te-

teram ab altera subtrahendo, $[a'b + ab']y = a'c - ac'$, ex quo $y = \frac{a'c - ac'}{a'b + ab'}$.

Si æquationes propositæ fuissent $ax + by = c$, $a'x + b'y = c'$, pari methodo invenietur $x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b} = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'}$, $y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}$.

Exemplum II. Æquationes sint tres, ac tres incognitæ, videlicet

$$\left\{\begin{array}{l} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \\ a''x + b''y + c''z = d'' \end{array}\right\}$$ Ut y eliminetur, duc b' in primam æquationem, & b in secundam, & orietur

$$\left\{\begin{array}{l} ab'x + bb'y + b'cz = b'd \\ a'bx + bb'y + bc'z = bd' \end{array}\right\}$$ factaque subtractione, erit $(ab' - a'b)x + (b'c - bc')z = b'd - bd'$.

Multiplica primam æquationem per b'', tertiam per b; proveniet

$$\left\{\begin{array}{l} ab''x + bb''y + b''cz = b''d \\ a''bx + bb''y + bc''z = bd'' \end{array}\right\}$$; subtrahe, & obtinebis $(ab'' - a''b)x + (b''c - bc'')z = b''d - bd''$. Tres igitur æquationes, ac tres incognitæ per cognitas multiplicatæ ad duas sunt reductæ, nimirum

$$\left\{\begin{array}{l} (ab' - a'b)x + (b'c - bc')z = b'd - bd' \\ (ab'' - a''b)x + (b''c - bc'')z = b''d - bd'' \end{array}\right\}$$; quapropter vel per Regulam supra traditam, vel per valorum substitutionem in æquationibus ad x, & y in primo Exemplo factis, duarum incognitarum x, y valor innotescet, ac proinde tertiæ z. Sic per substitu-

tu-

tutionem habemus $a = ab' - a'b$; $b = b'c - bc'$; $a' = ab'' - ba''$; $b' = cb'' - bc''$; $c = b'd - bd'$; $c' = b''d - bd''$; quibus valoribus in dicti Exempli primi formula $x = \frac{bc' - b'c}{a'b - ab'}$ ſuffectis, oritur nova æquatio $x =$

$$\frac{[b'c - bc'][b''d - bd''] - [b''c - bc''][b'd - bd']}{[b'c - bc'][ab'' - a''b] - [ab' - a'b][b''c - bc'']};$$ Per

Regulam vero ſupra traditam multiplicetur prima æquatio per $b''c - bc''$, ſecunda per $b'c - bc'$, ac deinde ſubtrahendo fiet $((ab' - a'b)(b''c - bc'') - (ab'' - a''b).(b'c - bc'))\, x = (b'd - bd')(b''c - bc'') - (b''d - bd'').(b'c - bc')$; unde rurſus

$$x = \frac{[b'd - bd'][b''c - bc''] - [b''d - bd''][b'c - bc']}{[ab' - a'b][b''c - bc''] - [ab'' - a''b][b'c - bc']};$$

quæ æquatio, peractis multiplicationibus, terminis ſe elidentibus deletis, ac facta per b diviſione, tandem evadit

$$x = \frac{b'c''d - bc''d' + bc'd'' - b''c'd + b''cd' - b'cd''}{ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c};$$

Conſimili methodo revocatis æquationibus

$$\left\{ \begin{array}{l} (ab' - a'b)x + (b'c - bc')z = b'd - bd' \\ (ab'' - a''b)x + (b''c - bc'')z = b''d - bd'' \end{array} \right\}$$

multiplicata prima per $ab'' - a''b$, ſecunda per $ab' - a'b$, & eliminata per ſubtractionem x, poſt ceteras operationes invenitur

$z =$

$$x = \frac{ab'd'' - a'bd'' + a''bd' - ab''d' + a'b''d - a''b'd}{ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}.$$

At ad incognitæ y valorem obtinendum expedit, posthabita substitutione, quæ intricatiorem operationem requirit, calculum rursus ordiri, exterminando z in æquationibus comparandis. Sic reperietur

$$y = \frac{ac''d' - a'c''d + a''c'd - ac'd'' + a'cd'' - a''cd'}{ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c}.$$

300. *Scholion.* Si pro æquationibus recensitis, quæ tres incognitas continent, resolvendis molestus fuit calculus, molestior evadet in æquationibus quatuor incognitas proferentibus, semper deinceps invalescente supputationis difficultate. Ut igitur laboris compendio consulamus, sequentia sunt advertenda.

(1.) Quicumque sit incognitarum x, y, z, &c. numerus, omnes eundem habent in earum valore denominatorem.

(2.) Denominator iste numeratorem statim exhibebit, si ibi incognitæ, ad quam æquatio inventa fuit, coëfficiens in ultimam æquationis propositæ literam commutetur. Ex. gr. incognitæ y coëfficiens b commutari debet in d, pariterque b' in d', & b'' in d'', & sic de reliquis coëfficientibus, quod ut clarius perspiciatur, æquationes ad singulas incognitas sic disponimus

$$x = \frac{(bc' - b'c)d'' + (b''c - bc'')d' + (b'c'' - b''c')d}{(bc' - b'c)a'' + (b''c - bc'')a' + (b'c'' - b''c')a}$$

$$y = \frac{(a'c - ac')d'' + (ac'' - a''c)d' + (a''c' - a'c'')d}{(a'c - ac')b'' + (ac'' - a''c)b' + (a''c' - a'c'')b}$$

$z =$

$$z = \frac{(ab' - a'b)d'' + (a''b - ab'')d' + (a'b'' - a''b')d}{(ab' - a'b)c'' + (a''b - ab'')c' + (a'b'' - a''b')c}.$$

(3.) Quod si d negative accipiatur, signa denominatoris ad numeratorem obtinendum sunt etiam commutanda. Eo igitur deducta res est, ut in quolibet incognitarum numero Regula pro denominatore isto communi obtinendo determinetur. Pro quo sequentia animadverto;

(4.) Si una sit æquatio, & una incognita, ut $ax = b$, denominator est a.

(5.) Si duæ sint æquationes, & duæ incognitæ, denominator, ut supra exposuimus, est $ab' - a'b$, qui oritur ex denominatore a in casu unius incognitæ, ducendo a sine accentu in b cum accentu; & vicissim, sive mutando $'$ in o, signo $-$ interjecto.

(6.) Si tres sint æquationes, & tres incognitæ, denominator $[ab' - a'b]c'' + [a''b - ab'']c' + [a'b'' - a''b']c$ conflatur ex denominatore $[ab' - a'b]$ per c'' multiplicato, quod efficit primum productum; In hoc [ut habeatur secundum productum] mutentur tam signa, quam accentus, nempe $''$ in $'$, & $'$ in $''$, ac fiet $[a''b - ab'']c'$; in quo pro tertio producto adsequendo mutentur $'$ in o, & o in $'$, itidemque signa, & stabit $[a'b'' - a''b']c$.

(7.) Ergo ut habeatur denominator in casu quatuor æquationum, & quatuor incognitarum, multiplicari debet denominator ad tres incognitas pertinens per d''', quod primum efformat denominatoris productum. In hoc præter signa mutentur $'''$ in $''$, & $''$ in $'''$, ac fiet secundum productum. Mutatis in isto signis, mutentur $''$ in $'$, & $'$ in $''$ pro tertio pro-

du-

ducto; in quo pro quarto mutentur ' in o, & o in ' una cum signis. Sic obtinebitur denominator
$(ab'c'' - a'bc'' + a''bc' - ab''c' + a'b''c - a''b'c)\,d''' +$
$(a'bc''' - ab'c''' + ab'''c' - a'''bc' + a'''b'c - a'b'''c)\,d'' +$
$(ab''c''' - a''bc''' + a'''bc'' - ab'''c'' + a''b'''c - a'''b''c)\,d' +$
$(a''b'c''' - a'b''c''' + a'b'''c'' - a'''b'c'' + a'''b''c' - a''b'''c')\,d.$

Invento igitur in casu quatuor incognitarum denominatore communi, ut habeatur ex. gr. valor incognitæ x, cujus coëfficiens est a, mutetur a in ultimum terminum e; a' in e'; a'' in e'', &c.; & numerator quæsitus erit in promptu.

(8.) Ex hisce constat quid agendum sit in casu, ubi plures incognitæ, totidemque æquationes occurrant.

301. *Coroll.* 1. Ubi adest una æquatio & una incognita, unus est terminus tam in numeratore, quam in denominatore; ubi duæ sunt æquationes & duæ incognitæ, duo sunt termini tam in numeratore, quam in denominatore. Ubi æquationes & incognitæ sunt tres, dicti termini sunt sex. Ubi æquationes & incognitæ sunt quatuor, termini recensiti erunt viginti quatuor, & sic prosequendo, isti termini reperientur crescere ut producta numerorum 1.2.3.4.5. &c.

302. *Coroll.* 2. Si fuerint tres æquationes $ax + by + cz = d$; $a'x + b'y = d'$; $a''x + z = d''$, liquet, hoc in casu esse $c' = 0$, $b'' = 0$, $c'' = 1$; quibus valoribus suffectis in superioris Exempli II. formulis, prodibit

$$x = \frac{b'd - bd' - b'cd''}{ab' - a'b - b'ca''};\quad y = \frac{ad' + a'cd'' - a''cd' - a'd}{ab' - a'b - a''b'c};$$

$$z = \frac{ab'd'' + a''bd' - a'bd'' - a''b'd}{ab' - a'b - a''b'c};$$

303.

303. Propositio VI. *Dato pretio duorum miscibilium, mixturam ex iisdem conficere, quæ veneat pretio determinato.*

Resolutio. Miscibilium alter M in mensuris singulis valeat a, alter m valeat b, & ex iisdem commixtis consurgere debeat tertium quid, cujus mensura valeat c. Sit miscibilis M quantitas in usum vocanda $= x$, alterius m quantitas $= y$; ergo primæ quantitatis commiscendæ valor $= ax$, alterius $= by$, quot enim sunt mensuræ, toties pretia a, & b sunt accipienda. Sed portiones x, & y debent unam mensuram simul conficere; ergo erit $x + y = 1$. Itidem quia quantitatum x, & y valores esse debent ex hyp. æquales c, fiet alia æquatio $ax + by = c$. Hinc

$$x = \frac{c-b}{a-b} = \frac{b-c}{b-a};\ y = \frac{a-c}{a-b} = \frac{c-a}{b-a} (299.);$$

adeoque $x : y = c - b : a - c = b - c : c - a$. Igitur si mixturam hac ratione dividas, obtinebis miscibilium portiones mixtum ingressuras, ut hujus singulæ mensuræ pretio c venundari queant; & hæc est celebris Regula, *alligationis* dicta.

304. Propositio VII. *Ait latro ad latronem; si quatuor nummos argenteos plus furatus essem, tu vero quatuor minus, eandem ac tu argenteorum quantitatem haberem. Respondit alter: Da mihi quatuor argenteos, & duplam quam tu argenteorum quantitatem possidebo; quæruntur furta.*

Resolutio. Primi furtum sit $= x$, alterius $= y$. Per primam conditionem erit $x + 4 = y - 4$; unde $x = y - 8$. Per secundam $y + 4 = 2[x - 4] = 2x - 8$;

ex

ex quo $x = \frac{1}{2} y + 6$. Hinc $y - 8 = \frac{1}{2} y + 6$; $y = 28$; $x = 28 - 8 = 20$.

Generalius si pro 4 ponamus a, erit $x + a = y - a$; $y + a = 2x - 2a$; sive $x = y - 2a$; $x = \frac{y + 3a}{2}$; quare $2y - 4a = y + 3a$; $y = 7a$; $x = 7a - 2a = 5a$.

Hoc autem problema sic aliter enunciari poterat. *Invenire duos numeros, quorum primus plus* a *sit æqualis alteri minus* a; *& quorum alter plus* a *sit duplus primi minus* a.

Vel universalius. *Duos numeros invenire, quorum primus plus* a *sit ad alterum minus* b *in ratione data; & quorum alter plus* c *sit ad primum minus* d *in data ratione*; cujus hæc est solutio.

$$\left\{\begin{matrix} x + a : y - b = e : f \\ y + c : x - d = g : h \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} fx + af = ey - be \\ hy + ch = gx - dg \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} ey - fx = af + be \\ gx - hy = ch + dg \end{matrix}\right\}$$

calculum igitur per methodum traditam ineundo, prodibunt

$$x = \frac{afh + beh + ceh + deg}{eg - fh}; \quad y = \frac{afg + beg + cfh + dfg}{eg - ef};$$

In latronum itaque problemate $a = b = c = d = 4$; $e = f = h = 1$; $g = 2$.

CAPUT VI.

DE ÆQUATIONUM SECUNDI GRADUS RESOLUTIONE.

305. PRopositio I. *Æquationes secundi gradus resolvere.*

Re-

Resolutio I. Ut æquationes secundi gradus resolvantur, ad æquationes primi gradus, sunt prius reducendæ; quoniam vero æquationes secundi gradus sunt ad quadratum elevatæ, si eas ad primum reducere volumus, patet, ita esse tractandas, ut extracta radice quadrata, incognita ex una æquationis parte simplex remaneat.

II. Cum itaque termini incognitam involventes, addita vel dempta quantitate aliqua, quadratum formant perfectum, hoc ex una æquationis parte solum collocetur, reliquis ex altera relictis; tum extracta radice quadrata, incognitæ valor obtinetur [158].

Sit ex. gr. $x^2 + ab = cc$; erit $x^2 = cc - ab$, & extracta radice quadrata, $x = \pm\sqrt{(cc - ab)}$.

Itidem si fuerit $xx + \frac{1}{4} aa = ax + bb$; transponendo terminum ax, fiet $xx - ax + \frac{1}{4} aa = bb$; quum autem primum æquationis membrum incognitam involvens sit quadratum perfectum, extracta utrinque radice quadrata, fit $x - \frac{1}{2} a = \pm b$; unde $x = \pm b + \frac{1}{2} a$.

III. Hoc secundum exemplum viam sternit ad methodum pro radicis quadratæ extractione in æquationibus quadraticis affectis absolvenda. Sit enim quadratica affecta $xx \pm ax = bb$. Quum ex potentiæ secundæ genesi appareat, binomium $x \pm a$ ad secun-

dam

dam potentiam elevatum constare debere ex terminorum x, & a quadratis [scilicet ex xx, & aa], & ex duplo facti alterius termini in alterum [nimirum ex $2ax$], liquet, quod si dimidium coëfficientis secundi termini (videlicet $\frac{1}{2} a$) ad secundam potentiam evectum (hoc est $\frac{1}{4} aa$) utroque membro æquationis addatur, æquatio persistet [146.], quæ quadratum incognitæ cum cognitis mixtæ ex una parte exhibebit, nempe $xx \pm ax + \frac{1}{4} aa = bb + \frac{1}{4} aa$; igitur extrahi poterit radix quadrata, eritque $x \pm \frac{1}{2} a = \pm \sqrt{(bb + \frac{1}{4} aa)}$; adeoque $x = \pm \sqrt{(b^2 + \frac{1}{4} a^2)} \mp \frac{1}{2} a$. *Quod erat* &c.

306. *Scholion.* Sed ambæ æquationis quadraticæ radices inveniri alia etiam methodo possunt, quam minime prætereundam censeo, quod animum præparat ad ea facilius intelligenda, quæ de altiorum æquationum resolutione tradi solent. Esto itaque generalis æquatio quadratica $x^2 + 2px + q = 0$, in qua $+ 2p$ exprimit secundi termini coëfficientem cum suo signo, & q ultimum terminum cum suo signo. Sumptis duabus indeterminatis f, & g postea determinandis, summa radicum hujus æquationis pona-

ciatur $= 2f$, earumque differentia $= 2g$. Radix igitur major erit $f+g$, minor $f-g$ [297. n. I.], adeoque $x=f+g$, & $x=f-g$, quæ duæ æquationes, reductæ singulæ ad zero, erunt $x-f-g=0$, & $x-f+g=0$; his autem invicem multiplicatis, fit nova æquatio $x^2-2fx+ff-gg=0$, quæ est eadem [*ex hyp.*] cum æquatione generali $x^2+2px+q=0$; quapropter si valores homogenei comparentur, erit $-2f=2p$, proindeque $f=-p$, & $ff=pp$. Præterea $ff-gg=q$, sive $gg=ff-q$; & suffecto pp loco ff, erit $gg=pp-q$; extractaque radice quadrata, habetur $g=\pm\sqrt{p^2-q}$; quare radix major $f+g=-p+\sqrt{p^2-q}$, minor $f-g=-p-\sqrt{p^2-q}$.

307. *Coroll.* 1. Hinc quatuor oriuntur formulæ generales pro quacumque secundi gradus æquatione resolvenda; hujusmodi enim æquationes possunt quatuor tantum modis, ratione signorum generaliter repræsentari, nempe

I. $x^2-2px-q=0$
II. $x^2+2px-q=0$
III. $x^2+2px+q=0$
IV. $x^2-2px+q=0$

Ex quibus singulis si valor incognitæ x modo supra exposito eliciatur, quatuor formulæ generales cum duplici signo $\pm$, ob duplicem radicem affirmativam & negativam, proficiscuntur, videlicet

I. $x= p\pm\sqrt{p^2+q}$
II. $x=-p\pm\sqrt{p^2+q}$
III. $x=-p\pm\sqrt{p^2-q}$
IV. $x= p\pm\sqrt{p^2-q}$

O Æqua-

Æquatione igitur propoſita ad aliquam ex quatuor primis formulis relata, termini mutuo comparentur, deinde radice reſpondente in formulis ſecundis reperta, ſuffectiſque valoribus, quæſitus incognitæ valor emerget.

308. *Coroll.* 2. Interea ſi generales haſce radices conſideramus, ſtatim apparet, quod ſi in tertia & quarta ex ſecundis formulis generalibus quantitas q major ſit quam p^2, radices erunt imaginariæ, potentia enim radicalis ſit negativa. Idem quoque contingit, ſi termino ſecundo deficiente, tertius ſit poſitivus, ut $x^2+q=0$; altera enim radix tunc erit $x=-\sqrt{-q}$, altera $x=\sqrt{-q}$, ambæ ſcilicet imaginariæ; quod evenire non poteſt, ſi tertius æquationis terminus ſigno negativo afficiatur, tunc enim radices ſunt reales, ut ex inſpectione primæ ac ſecundæ formulæ ſit manifeſtum.

Exemplum I. Sit æquatio $xx-x-2=0$. Liquet ex ſignis, eam pertinere ad primam formulam $x^2-2px-q=0$; facta igitur terminorum comparatione, erit $2p=1$, $p=\frac{1}{2}$, $p^2=\frac{1}{4}$, $q=2$; ſed hujus primæ formulæ radix eſt $x=p\pm\sqrt{p^2+q}$; ergo loco p, & q ſuffectis eorum valoribus, erit $x=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+2}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{9}{4}}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2$; nec non

non $x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$; profecto si $x + 1 = 0$, & $x - 2$ invicem multiplicentur, proposita prodibit æquatio.

Exemplum II. Sit $xx + 10x - 6 = 0$. Quum ad secundam formulam $x^2 + 2px - q = 0$ hæc pertineat, erit, $2p = 10$, $p = 5$, $pp = 25$, $-q = -6$, $q = 6$; Ergo quia formulæ secundæ radix est $x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$, erit $x = -5 + \sqrt{25 + 6} = -5 + \sqrt{31}$; nec non $x = -5 - \sqrt{31}$.

Exemplum III. Sit $xx + 4x + 7 = 0$ ad tertiam formulam $x^2 + 2px + q = 0$ ex signis attinens. Ergo si solitæ fiant comparationes, invenietur $2p = 4$, $p = 2$, $pp = 4$, $q = 7$; quoniam vero hujus tertiæ formulæ radix generalis est $x = -p \pm \sqrt{p^2 - q}$, subrogatis valoribus, erit $x = -2 + \sqrt{4 - 7} = -2 + \sqrt{-3}$; nec non $x = -2 - \sqrt{-3}$; utraque radix imaginaria.

Exemplum IV. Sit $xx - 7x + 12 = 0$. Hæc, prout signa indicant, ad quartam attinet formulam $x^2 - 2px + q = 0$; quare comparando terminos, erit $-2p = -7$, $p = \frac{7}{2}$, $pp = \frac{49}{4}$, $q = 12$. Sed radix generalis ejusdem formulæ est $x = p \pm \sqrt{p^2 - q}$; Ergo facta substitutione, habebitur $x = \frac{7}{2} +$

$\sqrt{\frac{49}{4} - 12} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = 4$, nec non $x = \frac{7}{2} - \frac{1}{2} = 3$; utraque radix realis affirmativa.

Exemplum V. Sit $\frac{a^{n - \frac{b}{x}}}{c^{mx}} = p^{x-q}$. Erit $nla - \frac{b}{x} la - mxlc = xlp - qlp$ (184. 190.); seu $nxla - bla - mxxlc = xxlp - qxlp$; ex quo $xxlp + xxmlc - nxla - qxlp = -bla$; seu $xx - \frac{x(nla + qlp)}{mlc + lp} = - \frac{bla}{mlc + lp}$; seu $xx - \frac{xl a^n p^q}{lpc^m} = - \frac{la^b}{lpc^m}$; & extrahendo radicem,

$$x = \frac{la^n p^q}{2lpc^m} \pm \sqrt{\frac{(la^n p^q)^2}{4(lpc^m)^2} - \frac{la^b}{lpc^m}}.$$

309. Propositio II. *Qualibet æquatio, in qua incognita duos tantum habet exponentes, quorum alter sit alterius duplus, haud secus ac quadratica resolvi potest.*

Dem. Esto formula generalis $x^{2m} \pm 2px^m \pm q = 0$ omnes hujusmodi æquationes complectens; ac fiat $x^m = z$; erit $x^{2m} = z^2$, quibus valoribus in æquatione proposita suffectis, alia oritur æquatio $z^2 \pm 2pz \pm q = 0$, ex qua radices extractæ in quatuor formu-

las

tas generales, prorsus ut supra disponuntur, mutato tantum u in z; sed $z = x^m$; ergo hoc valore substituto, quatuor formulæ evadent

$$\text{I. } x^m = p \pm \sqrt{p^2+q}$$

$$\text{II. } x^m = -p \pm \sqrt{p^2+q}$$

$$\text{III. } x^m = -p \pm \sqrt{p^2-q}$$

$$\text{IV. } x^m = p \pm \sqrt{p^2-q}$$

Extractaque rursus radice m, proveniunt quatuor aliæ formulæ sequentes

I. $x = \sqrt[m]{p \pm \sqrt{(p^2+q)}}$	quæ sunt radices respon-	I. $x^{2m} - 2px^m - q = 0$
II. $x = \sqrt[m]{-p \pm \sqrt{(p^2+q)}}$	dentes singulæ singulis	II. $x^{2m} + 2px^m - q = 0$
III. $x = \sqrt[m]{-p \pm \sqrt{(p^2-q)}}$	quatuor hisce formulis	III. $x^{2m} + 2px^m + q = 0$
IV. $x = \sqrt[m]{p \pm \sqrt{(p^2-q)}}$	generalibus	IV. $x^{2m} - 2px^m + q = 0$.

310. *Scholion.* Æquationes istæ, quæ instar quadraticarum resolvuntur, æquationes *derivatæ*, seu *derivativæ secundi gradus* appellantur. Et hic indicasse sufficiat, æquationes omnes derivativas secundi gradus non amplius quam quatuor radices *reales* habere posse, si exponens m sit numerus par; duas autem tantummodo, si sit impar; quod suo loco constabit.

Exemplum I. Sit $x^6 - 4x^3 + 12 = 0$ pertinens ad quartam formulam generalem. Facta comparatione, erit $p = 2$, $p^2 = 4$, $q = 12$, $m = 3$; quibus valori-

ribus in radice generali respondente $x = \sqrt[m]{p \pm \sqrt{(p^2 - q)}}$ suffectis, fiet $x = \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{(4 - 12)}} = \sqrt[3]{2 \pm 2\sqrt{-2}}$.

Exemplum II. Sit $x^3 - 7x^{\frac{3}{2}} - 8 = 0$, quæ ad primam formulam generalem attinet. Comparatis ut ante terminis, erit $p = \frac{7}{2}$, $p^2 = \frac{49}{4}$, $q = 8$, $m = \frac{3}{2}$; & peracta substitutione in prima radice generali respondente $x = \sqrt[m]{p \pm \sqrt{(p^2 + q)}}$, erit $x = \sqrt[\frac{3}{2}]{\frac{7}{2} + \sqrt{\left(\frac{49}{4} + 8\right)}} = \sqrt[\frac{3}{2}]{8} = \sqrt[3]{64} = 4$. Altera vero radix realis erit $x = \sqrt[\frac{3}{2}]{\frac{7}{2} - \sqrt{\left(\frac{49}{4} + 8\right)}} = \sqrt[\frac{3}{2}]{\frac{7}{2} - \frac{9}{2}} = \sqrt[\frac{3}{2}]{-1} = \sqrt[3]{1} = 1$.

Exemplum III. Sit $x^4 - aaxx - aabb = 0$ pertinens iterum ad primam formulam. Agendo ut supra, erit $p = \frac{1}{2}aa$, $p^2 = \frac{1}{4}a^4$, $q = aabb$, suffectisque in radice generali respondente valoribus, fiet $x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^4 + aabb\right)}} = \pm\sqrt{}$

$\sqrt{\frac{1}{2}a^2 \pm a\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 + b^2\right)}}$; unde omnes æquationis radices, quatuor videlicet, prodeunt, duæ reales, ac duæ imaginariæ, quarũ primæ $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}aa + a\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + bb\right)}}$, secundæ $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}aa - a\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + bb\right)}}$, quod $a\sqrt{\left(\frac{1}{4}aa + bb\right)}$ semper est major quam $\frac{1}{2}aa$.

311. Prop. III. *Caupo quidam solidos 175 pro prandio ab aliquo Convivarum numero exigebat; quia vero horum duo nummis carebant, reliquorum unusquisque impendit solidos decem plusquam ipsi obtigisset, si suam portionem singuli ex æquo solvissent; quæritur Convivarum numerus, ac pretium a singulis erogatum?*

Resolutio. Convivarum numerus ponatur $= x$; ergo numerus solventium erit $x - 2$; sed portio solvenda cujusvis convivæ pro se ac duobus aliis non solventibus est $\frac{175}{x-2}$, portio autem singulorum, si unusquisque ex æquo solvisset, est $\frac{175}{x}$; ergo excessus supra pretium singulis ex æquo obtingens erit $\frac{175}{x-2} - \frac{175}{x} = 10$ per conditionem problematis; quare $175x - 175x + 350 = 10x^2 - 20x$; sive $10x^2 - 20x - 350 = 0$; ac dividendo per 10, fiet $x^2 - 2x - 35 = 0$, quæ æquatio ad primam formulam per-

 ti-

tinet; comparando igitur terminos, prodibit $-2p=-2$; $p=1$; $p^2=1$; $q=35$, factaque in prima radice generali respondente substitutione, habetur $x=1\pm\sqrt{1+35}=1\pm 6$. Altera radix negativa $=-5$ huic problemati est inutilis, sed altera affirmativa $=7$ problemati satisfacit, nam septem sunt Convivæ; $\frac{175}{7}=25$ erat pretium a singulis septem Convivis ex æquo solvendum; & $\frac{175}{5}=35$ pretium a singulis quinque pro se, duobusque reliquis solutum; *Quod erat* &c.

312. Propositio IV. *Non nemo tritici modios* a *in suo campo seminandos obtulit ea lege, ut Rustico pro suo labore fructus tot modiorum ex messe obtingeret, quantum semen injectum pro modio multiplicaret; nimirum si semen quadruplicaret, Rusticus percepturus esset fructum quatuor modiorum, si quintuplicaret, quinque; & ita porro. Exacta messe in Domini horreum inlati sunt modii* b. *Quæro quæ fuerit singulorum modiorum multiplicatio, & quæ Rustici portio?*

Resolutio. Singulorum modiorum multiplicatio sit $=x$; ergo totius messis proventus erit $=ax$, & Rustici pars $=xx$, quia si ex. gr. cujuslibet modii fructus ad quinque modios ascenderet, Rusticus quinque modiorum fructum, nempe modios 25 (quadratum scilicet numeri multiplicationem exprimentis) ex pacto percipere debet. Hinc modii in Domini horreum delati sunt $ax-xx=b$; quæ æquatio reducitur per antithesim ad formulam quartam $xx-ax+b=0$.

Fa-

Facta igitur comparatione, erit $-2p = -a$; $p = \frac{1}{2} a$; $p^2 = \frac{1}{4} aa$; $q = b$; quare suffectis valoribus in radice generali respondente $x = p \pm \sqrt{p^2 - q}$, prodibit $x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} aa - b}$, quod in casibus particularibus dat singulorum modiorum multiplicationem, ac proinde Rustici portionem. *Quod erat* &c.

Exemplum. Si tritici modii a Domino pro semine oblati fuissent 40, & modii in horreum inlati 76, tunc foret $a = 40$, $b = 76$; quamobrem $x = 20 \pm \sqrt{400 - 76} = 20 \pm \sqrt{324} = 20 \pm 18$; ambæ igitur radices 38, & 2 quæsito satisfaciunt; si enim singulorum modiorum fructus fuisset 38, reditus 40 modiorum esset $38 . 40 = 1520$, & Rustici portio modiorum $38 . 38 = 1444$, quare Domino remansissent modii $1520 - 1444 = 76$. Itidem si fructus recensitus fuisset 2, reditus 40 modiorum foret $2 . 40 = 80$, & fructus duorum modiorum ad Rusticum pertinens fuisset $2 . 2 = 4$, adeoque rursus pro Domino remansissent modii $80 - 4 = 76$. *Quod erat* &c.

313. Propositio V. *Invenire duos numeros, in quibus productum, summa, & quadratorum differentia sint invicem æqualia.*

Resolutio. Duo numeri inveniendi sint x, y, quorum major x, minor y. Erit per conditionem problematis $x^2 - y^2 = xy$, & $x + y = xy$; hinc $x^2 - y^2 = x + y$, sive $(x + y)(x - y) = x + y$; quare $x - y = 1$, & $y = x - 1$. Præterea quoniam $x = xy - y$, ha-

habemus etiam $y = \frac{x}{x-1}$; adeoque $x - 1 = \frac{x}{x-1}$, & $xx - 2x + 1 = x$, five $xx - 3x + 1 = 0$; ex quo elicitur $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; idcirco $y = x - 1 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; & $xy = 2 \pm \sqrt{5}$; $x + y = 2 \pm \sqrt{5}$; $x^2 - y^2 = 2 \pm \sqrt{5}$. Idem invenietur, si loco $y = x - 1$, accipiatur $y = \frac{x}{x-1}$; nam $\frac{x}{x-1} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{1 \pm \sqrt{5}}$, & $xy = \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{1 \pm \sqrt{5}}\right) \times \left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{1 \pm \sqrt{5}} = 2 \pm \sqrt{5}$; Similiter $x + y = 2 \pm \sqrt{5}$, ac tandem $x^2 - y^2 = \frac{11 \pm 5\sqrt{5}}{3 \pm \sqrt{5}} = 2 \pm \sqrt{5}$; *Quod erat* &c.

314. Propositio VI. *Sint inveniendi duo numeri, quorum productum* $= 12$, *&* *quadratorum differentia* $= 7$.

Resolutio. Numerorum alter statuatur $= x$, alter $= y$. Duæ orientur æquationes, nimirum $xy = 12$, $x^2 - y^2 = 7$. Quoniam vero $x = \frac{12}{y}$, erit $xx - yy = \frac{144}{yy} - yy = 7$; ex quo prodit $y^4 + 7yy = 144$; vel $y^4 + 7yy - 144 = 0$, quæ est æquatio derivati-

va

va secundi gradus ad secundam formulam $y^{2m} + 2py^m - q = 0$ pertinens, cujusque radix est respondens $y = \sqrt[m]{-p \pm \sqrt{(p^2+q)}}$ (309.). Substitutis ergo valoribus, habetur $y = \pm \sqrt{-\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{49}{4} + 144\right)}}$, seu $y^2 = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{625}{4}} = \pm \frac{25 - 7}{2}$. Duos igitur habet y^2 valores, nempe $y^2 = 9$, & $y^2 = -16$, adeoque $y = \pm 3$, & $y = \pm \sqrt{-16}$. Hinc $xx = \frac{144}{yy} = \frac{144}{9} = 16$, & $xx = \frac{144}{-16} = -9$; quare $x = \pm 4$, & $x = \pm \sqrt{-9}$. Ergo $xy = 3 \times 4$, vel $-3 \times -4 = 12$, nec non $xy = -\sqrt{-9} \times \sqrt{-16}$ vel $= \sqrt{-9} \times -\sqrt{-16} = 12$; & $xx - yy = 16 - 9$, vel $= -9 + 16 = 7$. *Quod erat* &c.

315. Propositio VII. *Invenire tres numeros ejus conditionis, ut ipsorum summa sit* $= a$, *summa quadratorum ex singulis* $= b^2$, *summa omnium rectangulorum* $= c^2$.

Resolutio. Tres numeri quæsiti sint x, y, z; ergo ex conditione problematis, $x + y + z = a$; $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$; $xy + xz + yz = c^2$. Prima æquatione ad quadratum evecta, & e secunda subducta, provenit $x^2 + 2xy + y^2 + 2xz + 2yz + z^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 2xy + 2xz + 2yz = a^2 - b^2$. Ex hac subtrahatur duplum

plum tertiæ æquationis, eritque $2xy + 2xz + 2yz - 2xy - 2xz - 2yz = 0 = a^2 - b^2 - 2c^2$; quare habetur $c^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}$. Unde tria inferuntur; (1.°) tunc tantummodo problema esse possibile cum $c^2 = \frac{a^2 - b^2}{2}$; (2.°) summam rectangulorum, quæ ex tribus numeris effici possunt, semper esse $\frac{a^2 - b^2}{2}$, si numerorum summa $= a$, & singulorum quadrata simul sumpta $= b^2$; adeoque (3.°) præsens Problema esse ex genere plusquam determinatorum (250.).

316. Propositio VIII. *Datis duabus æquationibus quadraticis, in quibus singulis duæ adsint incognitæ; incognitarum alteram, quamvis ad secundam potestatem evectam, sine radicis extractione eliminare.*

Resolutio. Hoc brevius fieri solet per summam, vel per alterius æquationis ab altera, prout magis expedit, subtractionem, multiplicando, si oporteat, terminos per eandem incognitam, quæ debet evanescere; ac deinde summas, vel subtractiones usque ad omnimodam ejusdem evanescentiam repetendo, in quo totum artificium consistit, ut incognitæ eliminatio perfici possit. Sed formulam pro hujusmodi problematum solutione lubet indagare.

Sint itaque duæ æquationes $y^2 + py + q = 0$, & $y^2 + ry + s = 0$, duas quaslibet æquationes quadraticas repræsentantes, ubi p, q, r, s vel cognitas tantum,

tum, vel cognitas cum alia incognita mixtas designant. Altera ex altera æquatione subducatur (lubet secundam ex prima subducere) eritque $y^2 - y^2 + py - ry$

$+ q - t = y(p - r) + q - t = 0$, sive $y + \frac{q - t}{p - r}$

$= 0$, sive (ponendo $\frac{q - t}{p - r} = m$), $y + m = 0$;

hæc multiplicata per y evadet $y^2 + my = 0$, qua subtracta ex prima $y^2 + py + q = 0$, remanet $py - my + q = 0$, seu $y(p - m) + q = 0$, seu $y + q : (p - m) = 0$, qua ab antecedente $y + m = 0$ subtracta, remanet $m - q : (p - m) = 0$; sive restitutis valoribus, $\frac{q - t}{p - r} - \frac{q}{p - (q - t) : (p - r)} = 0$, in qua deest y. Suffectis igitur valoribus in casibus particularibus, & reducta secundum regulas jam traditas æquatione, valor unius incognitæ innotescet, quo in utraque æquatione introducto, alterius incognitæ valor per æquationum subtractionem, residuique reductionem emerget. *Quod erat* &c.

Exemplum I. Sint propositæ duæ æquationes

$$\begin{array}{llll} y^2 + 2ny + 2an = 0 & & y^2 + 2ny + bn = 0. \\ \quad + by + bn & & \quad - ay - bb \\ \quad\quad\; - aa & & \quad + by \\ \quad\quad\; - bb & & \end{array}$$

Facta comparatione, erit $p = 2n + b$; $q = 2an + bn - aa - bb$; $r = 2n - a + b$; $t = bn - bb$; ergo $\frac{q - t}{p - r}$

$=$

$= \frac{2an - aa}{a} = 2n - a; p - (q - s):(p - r) = a + b;$

$\frac{q - s}{p - r} - \frac{q}{p - (q - s):(p - r)} = 2n - a -$

$\frac{2an - bn + a^2 + b^2}{a + b} = \frac{bn - ab + bb}{a + b} = 0$; & multiplicando per $a + b$, ac dividendo per b, fit tandem $n - a + b = 0$, sive $n = a - b$; quo valore in propositis suffecto, illæ evadent

$$y^2 + 2ay - by + a^2 - ab - 2b^2 = 0$$
$$y^2 + ay - by + ab - 2b^2 = 0$$

Fiat subtractio, eritque $ay + a^2 - 2ab = 0$; unde $y = 2b - a$.

Exemplum II. Sint iterum duæ æquationes $y^2 - ny + n^2 = 0$, & $y^2 - cn + c^2 = 0$. Comparatis ut ante terminis, erit $p = -n$, $q = n^2$, $r = 0$, $s = c^2 - cn$; $\frac{q - s}{p - r} = \frac{c^2 - n^2 - cn}{n}$; $p - (q - s):(p - r)$

$= \frac{cn - c^2}{n}$; $\frac{q - s}{p - r} - \frac{q}{p - (q - s):(p - r)} =$

$\frac{c^2 - n^2 - cn}{n} - \frac{n^3}{cn - cc} = 0$, & ad communem denominatorem reducendo, $\frac{n^4 + cn^3 - 2c^3n + c^4}{cn^2 - c^2n} = 0$;

ac

ac tandem multiplicando per $cx^2 - c^2x$, prodibit $x^4 + cx^3 - 2c^3x + c^4 = 0$.

Exemplum III. Sint rursus duae aequatione $y^2 - x^2 - c^2 = 0$, & $xy - a^2 = 0$, quarum incognita y sit eliminanda. Ut allata methodus huic etiam casui applicari possit, y in secunda aequatione ad quadratum evehi debet; quare quum sit etiam $y - \frac{a^2}{x} = 0$, multiplico hanc aequationem per y, fitque $y^2 - \frac{a^2y}{x} = 0$, in quibus solita adhibita comparatione, erit $p = 0$, $q = - x^2 - c^2$, $r = - \frac{a^2}{x}$, $s = 0$; hinc $\frac{q-s}{p-r} = \frac{-x^3 - c^2x}{aa}$; $p - \frac{(q-s)}{p-r} = \frac{x^3 + c^2x}{aa}$; igitur $\frac{q-s}{p-r} - \frac{q}{p-(q-s):(p-r)} = \frac{-x^3 - c^2x}{aa} + \frac{a^2x^2 + a^2c^2}{x^3 + c^2x} = 0$; factaque prius ad eundem denominatorem reductione, deinde per eundem multiplicata aequatione, tandem habebitur $-x^6 - 2c^2x^4 \begin{array}{l} - c^4x^2 \\ + a^4x^2 \end{array} + c^2a^4 = 0$, sive $x^6 + 2c^2x^4 \begin{array}{l} + c^4x^2 \\ - a^4x^2 \end{array} - c^2a^4 = 0$.

317.

317. *Scholion.* Tria ex hoc tertio Exemplo veniunt adnotanda; (1.°) Quoniam ex secunda æquatione $xy - a^2 = 0$ habetur $y = \frac{a^2}{x}$, & $y^2 = \frac{a^4}{x^2}$; hoc valore in prima suffecto, fit æquatio $\frac{a^4}{xx} - x^2 - c^2 = 0$, sive $a^4 - x^4 - c^2x^2 = 0$, sive $x^4 + c^2x^2 - a^4 = 0$, quæ est æquatio quadratica derivativa per traditas methodos (309.) facile resolubilis. Pari ratione, si x evanescere debuisset, quum in secunda æquatione sit $x = \frac{a^2}{y}$, & $x^2 = \frac{a^4}{yy}$, hoc valore in prima subrogato, prodiisset $y^2 - \frac{a^4}{yy} - cc = 0$, sive $y^4 - c^2y^2 - a^4 = 0$, quæ rursus est æquatio quadratica derivativa facile & ipsa resolubilis. Hisce igitur in casibus expedit ab allata formula generali aliquando recedere, breviori, ac faciliori viæ, substitutioni nempe hic indicatæ, insistendo. (2.°) Si pro incognita y in secunda æquatione ad quadratum reducenda æquatio $y - \frac{a^2}{x} = 0$ ad secundam potentiam fuisset evecta, prodiisset $y^2 - \frac{2a^2y}{x} + \frac{a^4}{xx}$; tunc autem pro y eliminanda solitam formulam adhibentes, incidissemus

mus

mus in æquationem $x^8 + 2c^2x^6 - 2a^4x^4 - 2a^4c^2x^2 + a^8 = 0$
$+ c^4x^4$
exposita implicatiorem ; quare (3.°) Si altera ex duabus propositis æquationibus quadraticis formam quadraticam perfectam referat, satius erit prius radicem quadratam extrahere, deinde facta, si oporteat, per incognitam exturbandam multiplicatione, ad substitutionem, ut in hoc numero 1.°, devenire; quod etiam de utrisque æquationibus formam quadraticam perfectam exhibentibus est intelligendum. Qui vult in hac doctrina ulterius progredi, adeat Viros clarissimos, *Cramerum* in Appendice ad suam Introductionem in Curvarum Analysim, *Bezout* in Monum. Acad. Reg. Scient. Parif. Anni 1764. aliosque.

CAPUT VII.

PROBLEMATA INDETERMINATA.

318. Problemata indeterminata, quorum naturam jam indicavimus (290.) plures, & interdum infinitas recipiunt solutiones, quum enim minor sit æquationum, quam incognitarum numerus, nihil aliud agendum superest, quam alicui ex incognitis valorem arbitrarium (pro conditione tamen problematis) assignare; ubi animadvertendum, valores negativos ex hujusmodi artificio in æquatione finali prodeuntes, quippe inutiles, esse reiiciendos; quin etiam alia quandoque requiritur conditio, ut problematis resolutio per numeros integros exprimi

mi debeat; si enim quæstio cadat super homines, equos, &c. patet, numeros fractos non esse admittendos. Alia præterea hujusmodi problematum est conditio, ut quantitates irrationales ad rationalitatem, si fas sit, redigantur. Hæc Diophanti Alexandrini methodus Analysis indeterminata appellatur. Sit itaque

319. Propositio I. *Duos numeros invenire, quorum summa sit ad ipsorum differentiam in data ratione.*

Resolutio. Numerorum alter sit $= x$, alter $= y$, ratio data $a:b$; Per conditionem problematis erit $x+y:x-y=a:b$; hinc $ax-ay=bx+by$, sive

$$ax-bx=ay+by, \text{ ac demum } x=\frac{ay+by}{a-b}$$
$$=y\,\frac{(a+b)}{a-b}.$$

Si $a=3$, $b=2$, & sumatur ad arbitrium $y=4$;

erit $x=4\,\frac{(3+2)}{1}=20$; quare $20+4:20-4$,

seu $24:16=3:2$, &c. ubi perspicitur esse debere $b<a$, ut incognitæ x valor proveniat affirmativus.

320. Prop. II. *Duos numeros invenire, in quibus quadratorum summa, vel differentia sit quadratum.*

Resolutio. Sumo quadratum $a^4-2a^2b^2+b^4$; huic addo quadratum $4a^2b^2$, & summa erit quadratum $a^4+2a^2b^2+b^4$, cujus radix a^2+b^2; Ergo a^2-b^2, & $2ab$ erunt duo numeri quæsiti; *Quod erat primum.*

A quadrato $a^4+2a^2b^2+b^4$ detraho $4a^2b^2$, & residuum erit quadratum $a^4-2a^2b^2+b^4$, cujus radix

a^2

$a^2 - b^2$; Ergo $a^2 + b^2$, & $2ab$ erunt alii duo numeri quæsiti. *Quod erat secundum.*

321. Propositio III. *Sint formulæ* $nn \pm ab$; $nn \pm an$; $mn^2 \pm nan$; $nax - mn^2$; $\frac{m^2n^2 \pm n^3 n}{nn \pm 2rn + rr}$; $\frac{n^4 \pm ax^3 + bbnn}{cc}$, *ad quadratum, cujus radix sit rationalis, reducendæ.*

Resolutio. Ut quadratum nn ad primam potestatem deprimatur.

I. Pro formula prima pone $nn \pm ab = (z - n)^2 = zz - 2zn + nn$. Deletis communibus nn, erit $\pm ab = zz - 2zn$, seu $2nz = zz \mp ab$; hinc $n = \frac{zz \mp ab}{2z}$, quare $nn \pm ab = \frac{z^4 \mp 2zzab + a^2b^2 \pm 4zzab}{4zz} = \frac{z^4 \pm 2abzz + a^2b^2}{4zz}$; cujus quadrati radix $\frac{z^2 \pm ab}{2z}$. Ubi videtur, quod si n sit numerus integer, etiam $nn \pm ab$ numerum integrum efficiet, secus si fractus.

II. Pro secunda formula fac $nn + an = (z + n)^2 = zz + 2nz + nn$, eritque $an = z^2 + 2nz$, seu $an - 2zn = z^2$; unde $n = \frac{zz}{a - 2z}$. Quod si ponatur n quantitas negativa, erit $nn - an = zz - 2zn + nn$; quare deleto utrinque nn, terminisque rite transpositis, tandem habetur $n = \frac{zz}{2z - a}$.

III. Pro tertia, & quarta formula statue $mxx + nax = zzxx$. Divide per x; fiet $mx + na = zzx$, ex quo $x = \frac{na}{zz - m}$. Vel ponendo $mxx - nax = zzxx$, & operando ut ante, prodibit $x = \frac{na}{m - zz}$. Eodem modo, si fuerit $nax - mxx = zzxx$, invenietur $x = \frac{na}{m + zz}$.

IV. Pro quinta formula, omisso divisore quadrato, pone $m^2x^2 - n^3x = zzxx$; dividendo per x, exurget $m^2x - n^3 = zzx$; hinc $m^2x - zzx = n^3$, & $x = \frac{n^3}{mm - zz}$. Vel si fuerit $m^2x^2 + n^3x = zzxx$, peragendo ut ante, reperietur $x = \frac{n^3}{zz - mm}$. Quod si fuerit $\frac{n^3x - m^2x^2}{xx \pm 2rx + rr}$, statuendo $n^3x - m^2x^2 = zzxx$, & dividendo per x habebitur $x = \frac{n^3}{mm + zz}$.

V. Pro sexta formula, dividendo $\frac{x^4 \pm ax^3 + bbxx}{cc}$ per

xx

$\frac{uu}{cc}$, pone $uu \pm au + bb = (z-u)^2 = zz - 2zu + uu$. Sublato hinc inde uu, remanet $\pm au + bb = zz - 2zu$, sive $2zu \pm au = zz - bb$; adeoque $u = \frac{zz-bb}{2z \pm a}$, &c.

322. Lemma. *Sint* a, b *duo numeri, qui ad potestatem* m *intelligantur evecti; ajo, quod si* a^m *multiplicetur, aut dividatur per* b^m, *numerus exurget, qui numero ad eandem potentiam* m *elevato constabit.*

Dem. Sit $a^m b^m$. Fiat $b = \frac{c}{a}$; erit $a^m b^m = \frac{a^m c^m}{a^m} = c^m$; *Quod erat primum.*

Sit $\frac{a^m}{b^m}$. Fiat $b = \frac{a}{c}$; erit $\frac{a^m}{b^m} = \frac{a^m c^m}{a^m} = c^m$; *Quod erat secundum.*

323. Propositio IV. *Sint formulæ* $x^n y^{m+1} \pm x^r y^m$; $(a \pm bx)^{\frac{m}{n}}$ *in potestatem* m *transformandæ.*

Resolutio I. Pro prima ponamus, esse $x^n y^{m+1} \pm x^r y^m = z^m$. Divide per y^m primum membrum; sufficit quotientem $x^n y \pm x^r$ reducere ad potestatẽ z^m; quam-

quamobrem erit $y = \frac{t^m \mp x^r}{u^n}$, ubi incognitarum t, & u valores ad arbitrium, servatis servandis, assumi possunt.

II. Pro secunda statue $(a \pm bu)^{\frac{m}{n}} = z^m$. Extrahendo radicem m, fit $(a \pm bx)^{\frac{1}{n}} = z$; ergo $a \pm bu = z^n$; & $u = \frac{z^n - a}{\pm b}$; videlicet $u = \frac{z^n - a}{b}$ in primo casu, & $u = \frac{a - z^n}{b}$ in secundo.

324. Prop. V. *Sint formulae* $\sqrt{aa + xx}$, $\sqrt{xx - aa}$; $\sqrt{(a + bx)(c + dx)}$; $\sqrt{aa - xx}$; $(a + bx)^{\frac{1}{n}}$; $\left(\frac{a + bx}{f + gx}\right)^{m:n}$; $\sqrt{aa + bx + cxx}$; $\sqrt{aaxx + bx + c}$; $\sqrt{max \pm nxx}$ *ad rationalem expressionem reducendae.*

Resolutio I. Pro prima formula $\sqrt{aa + uu}$ fiat $u = \frac{aa - zz}{2z}$; erit $uu = \frac{a^4 - 2a^2z^2 + z^4}{4zz}$; quo valore substituto, provenit $\sqrt{aa + uu} = \frac{a^2 + z^2}{2z}$.

II.

II. Pro ſecunda formula fiat $x = \frac{aa + zz}{2z}$; erit $xx - aa = \frac{a^4 - 2a^2z^2 + z^4}{4zz}$; idcirco $\sqrt{xx - aa} = \frac{a^2 - z^2}{2z}$.

III. Pro tertia pone $\sqrt{(a + bx)(c + dx)} = z(a + bx)$. Quoniam vero $z(a + bx) = z\sqrt{(a + bx)(a + bx)}$, erit $\sqrt{(a + bx)(c + dx)} = z\sqrt{(a + bx)(a + bx)}$; & quadrando, ac deinde dividendo per $a + bx$, fit $c + dx = z^2(a + bx)$, ſive $bzzx - dx = c - azz$; unde $x = \frac{c - azz}{bzz - d}$; Igitur ob $z(a + bx) = z\frac{(bc - ad)}{bzz - d}$, erit $\sqrt{(a + bx)(c + dx)} = z\frac{(bc - ad)}{bzz - d}$.

IV. Quod ſi ſtantibus iiſdem, fiat $b = 1$, $c = a$, $d = -1$, erit $\sqrt{(a + x)(a - x)} = \sqrt{aa - xx} = \frac{2az}{zz + 1}$ ob $x = \frac{a - azz}{zz + 1}$, quod quartam formulam reſpicit.

V. Pro quinta formula ſtatue $a+bx=z^n$; erit $x=\frac{z^n-a}{b}$; ſi vero fuerit $a-bx=z^n$, habebitur $x=\frac{a-z^n}{b}$. Si fuerit $bx-a=z^n$, prodibit $x=\frac{a+z^n}{b}$.

VI. Pro ſexta formula fac $\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)^{m:n}=z^m$; erit $\left(\frac{a+bx}{f+gx}\right)=z^n$; hinc $x=\frac{a-fz^n}{gz^n-b}$. Si b ſit quantitas negativæ, erit $x=\frac{a-fz^n}{gz^n+b}$. Si b, & g ſint quantitates negativa, erit $x=\frac{a-fz^n}{b-gz^n}$. Si f ſit quantitas negativa, erit $x=\frac{a+fz^n}{gz^n-b}$. Si f, & a ſint quantitates negativæ, erit $\frac{fz^n-a}{gz^n-b}=x$. Si tandem a, & g ſint quantitates negativæ, erit $x=\frac{a+fz^n}{gz^n+b}$. Omittitur caſus, in quo a, & b ſunt negativæ, quod formula foret negativa.

VII. Pro ſeptima ſtatue $\sqrt{aa+bx+cxx}=a+xz$; qua-

quadrando, erit $b + cx = 2az + xzz$; quare $x =$ $\frac{b - 2az}{zz - c}$, adeoque $a + xz = \frac{bz - azz - ac}{zz - c}$.

VIII. Pro octava pone $\sqrt{aaxx + bx + c} = ax + z$; quadrando, erit $bx + c = 2axz + zz$, & $x =$ $\frac{zz - c}{b - 2az}$; hinc $ax + z = \frac{bz - azz - ac}{b - 2az}$.

IX. Pro nona sume $\sqrt{max \pm nxx} = \frac{xz}{a}$. Erit $max \pm nxx = \frac{x^2z^2}{a^2}$; sive $ma \pm nx = \frac{xz^2}{a^2}$; hinc $\frac{xz^2}{a^2} \mp nx = ma$; adeoque $x = \frac{ma^3}{z^2 \mp na^2}$; $x^2 =$ $\frac{m^2a^6}{(z^2 \mp na^2)^2}$. Ergo $\sqrt{max \pm nxx} = \frac{ma^2z}{z^2 \mp na^2}$.

Quod si statuatur $m = 2$, $n = 1$, ut fiat $\sqrt{2ax \pm xx}$, sic quoque transformatio institui potest. Pone $a \pm x = u$; erit $aa \pm 2ax + xx = uu$; hinc $\pm 2ax + xx = uu - aa$; quare in primo casu prodit $\sqrt{2ax + xx}$ $= \sqrt{uu - aa}$, quod secundam formulam respicit; in

in altero casu mutatis signis, habetur $2ax - xx = aa - uu$, ac proinde $\sqrt{2ax - xx} = \sqrt{aa-uu}$, quod ad quartam formulam refertur.

325. Propositio VI. *Invenire tres numeros ejus conditionis, ut omnium summa sit quadratum, & duorum quorumlibet summa sit quadratum.*

Resolutio. Tres numeri quæsiti sint x, y, z. Finge $v+1$ esse radicem illius quadrati, quod omnium summam conficit; ergo $v^2+2v+1 = x+y+z$. Quoniam vero $x+y$ est quadratum, fiat $x+y=v^2$; erit $z=2v+1$. Itidem quia $y+z$ est quadratum, imaginor, esse $v-1$ ejus radicem; quare $y+z=v^2-2v+1$, ex quo dempto ipsius z valore jam reperto $2v+1$, habetur $y=v^2-4v$. Tandem ab $x+y=v^2$ sublato hoc postremo ejusdem y valore, prodit $x=4v$. Ergo tres numeri quæsiti erunt $x=4v$; $y=v^2-4v$; $z=2v+1$.

Sed quia ex problematis conditionibus requiritur etiam $x+z$, sive $6v+1$, esse quadratum; fiat $6v+1=a^2$; erit $v=\frac{a^2-1}{6}$; ubi advertendum, esse debere $a^2>25$; secus majus esse non poterit quam 4, quod si eveniret, $y=v^2-4v$ vel fieret $=0$, vel evaderet quantitas negativa. Sit ex. gr. $a=49$; erit $v=\frac{48}{6}=8$; $x=32$; $y=32$; $z=17$; hinc $x+y=64$; $x+z=49$; $y+z=49$.

326.

326. *Monitum.* Quum autem tam ex hac propositione, quam ex præcedentibus colligatur, Problemata indeterminata sæpius intra limites quosdam coerceri; ut casus isti, qui peculiarem methodum exigunt, evolvantur, præmonendum est, huic Problematum classi adnumerari Problemata, quæ *semideterminata*, vel *imperfecte determinata* ob affinitatem nuncupantur; in iis enim tot æquationes institui nequeunt, quot adsunt incognitæ; at si nonnullæ conditiones adiiciantur, solutionum numerus ita imminuitur, ut sæpissime determinatus, & quandoque nullus evadat. Quoniam vero id genus problematum numeros affirmativos simul & integros exigit, æquationibus ad unam, si oporteat, redactis, limites primo sunt determinandi, inter quos unius incognitæ valor ita consistat, ut valor alterius nunquam emergat negativus; deinde alii atque alii valores sunt uni ex indeterminatis assignandi, donec altera ad numerum integrum reducatur. Sit itaque

327. Propositio VII. *Limites valorum in numeris integris, quos habet indeterminata primi gradus invenire.*

Resolutio I. Sit primo $x = a + by$. Quicumque sit numerus positivus integer, quem incognitæ y impertiri lubeat, liquet, valorem x semper esse a fractionibus liberum, quapropter solutionum numerus erit infinitus, adeoque nulli aderunt limites.

II. Sit secundo $x = a - by$. Ut valor negativus evitetur, esse debet $by < a$, & $y < \frac{a}{b}$; quemcumque igitur va-

lo-

lorem habeat y, dummodo minor sit quam $\frac{a}{b}$, numerus semper prodibit positivus, atque integer; sed numerus numerorum integrorum inter zero, & $\frac{a}{b}$ existentium est finitus; ergo finitus erit solutionum numerus.

III. Sit tertio $x = by - a$. Quia statui debet $by > a$, erit $y > \frac{a}{b}$, adeoque solutionum numerus in infinitum abibit.

IV. Sit quarto $x = \frac{a + by}{c}$, ubi ponatur, ut in proxime subsequentibus, $\frac{a}{c}$ numerus integer $= m$; erit $x = m + \frac{by}{c}$; quapropter si fiat $y = nc$, quicumque numerus integer literæ n assignetur, erit $x = m + \frac{bnc}{c} = m + nb$, ac proinde numerus integer semper obtinebitur, infinitasque admittet problema solutiones, nec ideo ulli aderunt limites.

V. Sit quinto $x = \frac{a - by}{c}$, sive $x = m - \frac{by}{c}$. Quoniam

niam esse debet $by < cm$, sive $by < a$, erit $y < \frac{a}{b}$, adeoque ut numerus evadat integer, pro y subrogandus est numerus $nc < \frac{a}{b}$, ex quo solutionum numerus erit finitus, vel nullus, si nullus fuerit iste numerus, quo in casu problema est impossibile.

VI. Sit sexto $x = \frac{-a + by}{c}$, sive $x = -m + \frac{by}{c}$.

Quia $by > cm$, seu $by > a$, erit $y > \frac{a}{b}$; ergo ad numerum integrum reddendum, substituendus est pro y numerus $nc > \frac{a}{b}$, ac propterea numerus solutionum in infinitum excurret.

VII. Sit septimo $ax + by + cz = fg$. Quum de numeris integris tantum agatur, liquet, nullam indeterminatarum x, y, z unitate minorem esse posse; quamobrem quia $x = \frac{fg - by - cz}{a}$, incognita major esse nequit quam $\frac{fg - b - c}{a}$, nam ex quantitate fg quantitas minor quam $b + c$ demi non po-

potest. Eadem ratione y major esse nequit quam $\frac{fg-a-c}{b}$, & z major quam $\frac{fg-a-b}{c}$.

VIII. Octavo ad limites pro incognitarum summa inveniendos sit $ax+by+cz=d$. Statuo $x+y+z=m$, & ut x exturbetur, subtraho secundam æquationem per a multiplicatam ex prima, nempe $ax+ay+az=am$ ex data $ax+by+cz=d$; & pro residuo habeo $by-ay+cz-az=d-am$, seu $y(b-a)+z(c-a)=d-am$, unde $m=\frac{d-y(b-a)-z(c-a)}{a}$; quoniam vero per hypothesim y, & z esse nequeunt unitate minores, erit $\frac{d+2a-b-c}{a}$ quantitas maxima, adeoque m major esse nequit quam $\frac{2a+d-b-c}{a}$, qui proinde erit alter ex limitibus quæsitis.

Deinde ad z eliminandum multiplicetur per c æquatio $x+y+z=m$, & æquatio data ex hac subtrahatur; æquatio residua prodibit $x(c-a)+y(c-b)=cm-d$; unde $m=\frac{(c-a)x+(c-b)y+d}{c}$; sed $\frac{c-a+c-b+d}{c}$, vel $\frac{2c+d-a-b}{c}$ est quanti-

titas minima, si $x=1$, $y=1$; ergo m minor esse nequit quam $\frac{2c+d-a-b}{c}$, qui propterea erit alter ex limitibus quæsitis; igitur duo limites, inter quos ignotarum summa m consistere debet, sunt $\frac{2a+d-b-c}{a}$, & $\frac{2c+d-a-b}{c}$, &c.

328. *Corollarium.* Data igitur una æquatione, ac tribus incognitis per cognitas multiplicatis, omnes singularum incognitarum valores possibiles per octavum hunc numerum poterunt inveniri. Sit enim æquatio $7x+4y+9z=400$; erit $a=7$, $b=4$, $c=9$, $d=400$; quare limites erunt $\frac{401}{7}$, & $\frac{407}{9}$, sive 54, & 45, rejectis fractionibus. Ponatur itaque $m=50$; quoniam $x(c-a)+y(c-b)=cm-d$, suffectis valoribus, erit $2x+5y=450-400=50$. Sed hoc in casu y minor esse debet quam 10, nam $y=\frac{50-2x}{5}=10-\frac{2}{5}x$; ergo si fiat $y=4$, erit $2x=50-20$, sive $x=15$. Sed $z=m-x-y=50-15-4=31$; ergo unum ex possibilibus quoad incognitarum valores casibus sumus expiscati; atque consimili ratione in reliquorum indagatione procedendum.

329. Propositio VIII. *Data fractione indetermi-*

nata

nata $\frac{a+by}{c}$, *in qua sit* a, *vel* b *quantitas positiva, aut negativa, neque* $\frac{a}{c}$ *numerum integrum exhibeat, valorem* y *invenire, qui hanc fractionem numero integro æqualem reddere possit.*

Resolutio. Formulam $\frac{a+by}{c}$ a fractionibus impropriis omnino liberam, seu per minimam fractionem expressam primum adsumimus. Secundo cavendum antequam calculum aggrediamur, ne ipsius $\frac{a+by}{c}$ ad numerum integrum reductio sit impossibilis, quod evenit, quotiescumque numeri b, c non sint inter se primi, seu quotiescumque alios factores præter unitatem communes habeant. Ponatur enim hujusmodi communis factor $= n$, ita ut sit $b = nf$; $c = ng$; non poterit a eundem cum c habere factorem n, secus esset numerus integer contra hypothesim. Statuatur $\frac{a+nfy}{ng} = p$; erit $\frac{a}{n} + fy = gp$, unde $fy = gp - \frac{a}{n}$; sed fy esse debet numerus integer; ergo numerus integer erit etiam $gp - \frac{a}{n}$, quod hypothesim destruit; ac proinde numerus y nunquam integer esse poterit. Hi-

Hisce præmissis, proponatur $\frac{a+by}{c}$, in qua b, c sint numeri inter se primi; patet, quod si major per minorem dividatur, rejectisque numeris integris, atque inversa fractione, divisio iterum instituatur, & ita porro, tandem ad residuum unitati æquale deveniendum erit. Ex. gr. si fuerit $\frac{c}{b} = e + \frac{f}{g}$; $\frac{g}{f} = h + \frac{i}{k}$, &c. tandem ad residuum i unitati æquale perveniemus. Hoc probe intellecto, si (posito p numero integro) statuatur $\frac{a+by}{c} = p$, erit $y = \frac{cp-a}{b}$. Sit $\frac{c}{b} = e + \frac{f}{b}$, habebitur $y = ep + \frac{fp-a}{b}$. Fiat $\frac{fp-a}{b} = q$, erit $p = \frac{bq+a}{f}$. Sit $\frac{b}{f} = g + \frac{h}{f}$, erit $p = g + \frac{hq+a}{f}$. Igitur si eo deventum sit, ut fractionis $\frac{h}{f}$ numerator h sit unitas, quod tandem debeat accidere, erit $p = g +$

$\frac{q+a}{f}$; quare si fiat $\frac{q+a}{f}=r$, obtinebitur $q=fr-a$, qui erit necessario numerus integer, quicumque numeri integri r sit valor.

Invento numero integro, cui q æquatur, si retrovertamur, facile percipiemus, quantitatem $\frac{q+a}{f}$ esse debere numerum integrum ob $q+a=fr$, adeoque etiam $g+\frac{bq+a}{f}$, nec non $\frac{bq+a}{f}$, pariterque tam $\frac{fp-a}{b}$, quam $\frac{cp+a}{b}$, ac denique $\frac{a+by}{c}$; *Quod erat &c.*

330. *Corollarium.* Si ponatur $x=\frac{a+by}{c}$, erit $cx=a+by$; at si fuerit b quantitas negativa, erit $cx=a-by$, ubi constat, esse debere $a>by$, ne quantitates negativæ in fine calculi occurrant. Prima igitur æquatio $cx=a+by$ casus infinitos habere potest, quod non accidit alteri $cx=a-by$, quæ semper intra limites aliquos coarctatur. Quod si ponamus $a=0$, tunc æquatio fit $cx=by$, cujus facilior est resolutio. Sed ad Exempla in re, quæ ulteriorem perspicuitatem exposcit, descendamus.

Exemplum I. Quæratur numerus, qui dividi possit tam per 3, quam per 5. Posito tali numero $=N$, fiat

fiat $\frac{1}{3}N = x$, erit $N = 3x$, & ob eandem rationem erit $N = 5y$; quare $3x = 5y$, & $x = \frac{5}{3}y = y + \frac{2}{3}y$. Fiat $y = 3v$, erit $x = \frac{5}{3} \cdot 3v = 5v$, seu $N = 15v$. Itaque si pro v numerus quilibet integer accipiatur, N infinitum valorum numerum habere potest, veluti 15, 30, 45, 60, &c. Si quis autem præter allatas conditiones cupiat, numerum N esse quoque divisibilem per 7, quoniam jam invenimus $N = 15v$, fiat præterea $N = 7z$; erit $z = \frac{15}{7}v$; ut igitur v per 7 dividi possit, fiat $v = 7t$, erit $z = \frac{15 \cdot 7t}{7} = 15t$, adeoque numerus quæsitus $N = 15 \cdot 7t = 105t$.

Exemplum II. Esto quantitas $\frac{66 + 47y}{27}$ ad numerum integrum reducenda. Animadverto primum, numeros 47, & 27, qui superius notatis b, c respondent, esse inter se primos, proptereaque imperatam reductionem non involvere casum impossibilem; secundo, formulam ad minorem expressionem redigi posse nempe $2 + y + \frac{12 + 20y}{27}$; & quoniam

12, & 20 communem habent factorem 2, illam etiam exprimi per $2 + y + 2\frac{(6 + 10y)}{27}$, quae quum maximam simplicitatem sit adsequuta, *reducta* appellabitur: sumpto igitur p pro numero quolibet integro, esse debet $\frac{6 + 10y}{27} = p$, unde $y = \frac{27p - 6}{10}$ $= \frac{30p - 3p - 6}{10}$ (sumo hanc expressionem, quod numeratoris terminos sic augendo calculus fit interdum expeditior), quae reducta fit $3p - \frac{3p - 6}{10}$.

Statue $-\frac{3p - 6}{10} = q$; habebis $p = -\frac{10q - 6}{3}$, quae reducta evadit $-3q - 2 - \frac{1}{3}q$; pone $-\frac{1}{3}q = r$, erit $-q = 3r$. Hinc retro reversus invenio $p = -\frac{10q - 6}{3} = 10r - 2$; $y = \frac{27p - 6}{10} =$ $27r - 6$; ac demum $\frac{66 + 47y}{27} = 47r - 8$.

Exemplum III. Quaeruntur duo numeri positivi, & integri x, y ejus conditionis, ut sit $3x + 5y = 47$, vel

vel $x = \frac{47 - 5y}{3}$. Fractio reducta erit $15 + y + \frac{2 - 2y}{3}$. Fiat $\frac{2 - 2y}{3} = p$; erit $2 - 2y = 3p$, & $-y = \frac{3p - 2}{2}$, seu $y = \frac{2 - 3p}{2} = 1 - p - \frac{1}{2}p$; ponatur $-\frac{1}{2}p = q$, erit $-p = 2q$, seu $p = -2q$. Hinc $y = \frac{2 - 3p}{2} = \frac{2 + 6q}{2} = 1 + 3q$; $x = \frac{47 - 5y}{3} = \frac{42 - 15q}{3} = 14 - 5q$. Ergo alios valores habere q nequit, nisi $0, 1, 2$, proinde valores y erunt $1, 4, 7$, quibus respondent valores $x = 14, 9, 4$.

Exemplum IV. Viginti Gladiatores, partim Romani, partim Etrusci, partim Neapolitani, singulari certamine pugnarunt; vulnera invicem inflicta 75; Romanis vero singulis duo, Etruscis tria, Neapolitanis quinque. Quis Romanorum, quis Etruscorum, quis Neapolitanorum numerus?

Resolutio. Sit Romanorum numerus $= x$; Etruscorum $= y$, Neapolitanorum $= z$. Problematis conditiones duas æquationes involvunt; alteram pro pugnantium, alteram pro vulnerum numero; igitur

tur $x+y+z=20$; $2x+3y+5z=75$. Ut una ex incognitis evanescat, multiplico per 5 primam æquationem, & ex illa secundam subduco, unde $5x+5y+5z-2x-3y-5z=100-75$, sive $3x+2y=25$, sive $x=\frac{25-2y}{3}=8+\frac{1-2y}{3}$.

Pono compendii gratia $\frac{2y-1}{3}=p$; erit $y=\frac{3p+1}{2}=p+\frac{p+1}{2}$. Statuo $\frac{p+1}{2}=q$; erit $p=2q-1$. Itaque $y=\frac{6q-3+1}{2}=3q-1$, $x=\frac{25-6q+2}{3}=9-2q$. Si fiat $q=1$, erit $x=7$, $y=2$; ergo ut numerus 20 compleatur, erit $z=11$. Profecto $7.2+2.3+11.5=75$. Si alii numeri in locum p substituantur, quatuor tantum fieri poterunt substitutiones, quas exhibet Tabella, adeoque quatuor tantum modis poterit problema resolvi.

$x=7$,	$y=2$,	$z=11$
5	5	10
3	8	9
1	11	8

Quod si addas conditionem, Neapolitanorum numerum esse debere maximum, Romanorum autem minimum, problema fiet penitus determinatum, unam enim tantummodo solutionem admittet, propter quam Romani erunt 3, Etrusci 8, Neapolitani 9.

331.

331. *Scholion* I. Si quis metalla, vel res annonarias, de quibus singulis pretia constent, ita miscere cupiat, ut data massa, vel mensura veneat pretio determinato; facta prius ex pluribus incognitis ad duas incognitas reductione, problema per duas æquationes, ut in hoc Exemplo, postea resolvetur.

332. *Scholion* II. Quoniam in omnibus hujusmodi problematum solutionibus habetur semper formula quæ huic æquivalet $m \pm np$, ubi m, n sunt duo numeri determinati, & p est quantitas indeterminata, pro qua sumi possunt omnes numeri naturales incipiendo interdum etiam a zero, liquet, progressionem hinc nascentem exprimi posse per $m \pm n.0$, $m \pm n.1$, $m \pm n.2$, $m \pm n.3$, &c. quod indicat, numeros ex progressionibus hisce prodeuntes semper progressionem arithmeticam servare debere quare datis duobus numeris ad singulas incognita x, y, z, &c. pertinentibus, progressiones arithmeticæ singulis respondentes continuari facillime potrunt. Artificium autem illud, quo per duas æquations tres vel plures incognitæ determinantur, *Regula Cæci* appellatur.

Exemplum V. Numerum 44. in tres partes dividere, ita ut factum primæ per 4, secundæ per 3, & quotus tertiæ per 3 conficiant 58.

Resolutio. Parte prima vocata x, secunda y, tertia z, erit per conditionem problematis $x + y + z = 44$, pariterque $4x + 3y + \frac{1}{3} z = 58$. Ab æquatione

tione secunda per 3 multiplicata si prima subtrahatur, habebitur $11x + 8y = 130$, sive $x = 11 +$

$\frac{9 - 8y}{11}$. Finge $\frac{8y - 9}{11} = p$, erit $y = p - 1 +$

$\frac{3p + 1}{8}$. Pone $\frac{3p + 1}{8} = q$; erit $p = 2 + \frac{2q - 1}{3}$.

Statue $\frac{2q - 1}{3} = r$; erit $q = r + \frac{r + 1}{2}$. Demum

fac $\frac{r + 1}{2} = t$; erit $r = 2t - 1$; unde $q = 3t - 1$,

$p = 8t - 3$, $y = 11t - 3$, $x = 14 - 8t$. Ubi statim perspicitur, problema unam tantum solutionem admittere, nempe cum sit $t = 1$; si enim ponatur $t = 2$, erit $x = -2$, quod est contra hypothesim; idem continget, si statuatur $t = 0$, quod tunc habetur $y = -3$. Ergo pro solutione problematis invenitur $x = 6$, $y = 8$, ac proinde $z = 30$, quorum summa $= 44$, atque insuper $4.6 + 3.8 +$

$\frac{30}{3} = 58$.

Exemplum VI. Quaero numerum, qui per 7 divisus relinquat 6; per 9, relinquat 7.

Resolutio. Esto x quotus primae divisionis; hic in divisorem 7 ductus exhibet factum, cui si addatur 6, erit $7x + 6$ numerus, qui per 7 divisus relinquit 6. At idem hic numerus numero 7 imminu-

tus

tus esse debet per hypothesim divisibilis per 9; ergo $\frac{7x+6-7}{9} = \frac{7x-1}{9}$ exprimet numerum duas expetitas conditiones includentem. Fiat itaque $\frac{7x-1}{9} = p$; erit $x = \frac{9p+1}{7} = p + \frac{2p+1}{7}$.

Fiat $\frac{2p+1}{7} = q$; erit $p = \frac{7q-1}{2} = 3q + \frac{q-1}{2}$. Fiat $\frac{q-1}{2} = r$; erit $q = 2r+1$. Hinc $p = 7r+3$; $x = 9r+4$; ergo $7x+6 = 63r+34$; ubi r esse potest de more quilibet numerus integer, vel etiam zero. Animadvertendum interea, quod si pro secunda conditione accipere lubeat $9p+7$, quoniam idem numerus duabus hisce conditionibus affectus requiritur, habebitur æquatio $7x+6 = 9p+7$, adeoque erit $p = \frac{7x-1}{9}$, prorsus ut supra.

Exemplum VII. Proponatur indagandus numerus, qui per 7 divisus relinquat 6; per 9 relinquat 7; per 11 relinquat 8; per 17 relinquat 1; &c.

Resolutio. Quum binis hisce proprietatibus etiam promiscue sumptis idem numerus gaudere debeat, quæro numerum duas postremas exhibentem, ut deinde per istum cum jam invento in Exemplo præcedente instituatur æquatio. Ut igitur habeatur nume-

merus qui divisus per 11 relinquat 8, per 17 relinquat 1, pono ut supra $\frac{11x + 8 - 1}{17} = \frac{11x + 7}{17}$ $= p$; erit $x = \frac{17p - 7}{11} = p + \frac{6p - 7}{11}$. Fiat $\frac{6p - 7}{11} = q$; erit $p = \frac{11q + 7}{6} = q + 1 + \frac{5q + 1}{6}$. Fiat $\frac{5q + 1}{6} = r$; erit $q = \frac{6r - 1}{5} = r + \frac{r - 1}{5}$. Fiat $\frac{r - 1}{5} = s$, erit $r = 5s + 1$. Hinc $q = 6s + 1$; $p = 11s + 3$; $x = 17s + 4$; ergo $11x + 8 = 17p + 1 = 187s + 52$.

Superest igitur, ut fiat $63x + 34 = 187y + 52$; nihil enim impedit, quominus x, & y pro r, & s substituantur, possunt enim quantitates indeterminatæ per quasvis literas designari; adeoque erit $x = \frac{187y + 52 - 34}{63} = \frac{187y + 18}{63}$. Fiat $\frac{187y + 18}{63} = p$; erit $y = \frac{63p - 18}{187}$. Fiat $\frac{63p - 18}{187} = q$; erit $p = \frac{187q + 18}{63} = 2q +$

61q

$\frac{61q+18}{63}$. Fiat $\frac{61q+18}{63}=r$; erit $q=\frac{63r-18}{61}$ $=r+\frac{2r-18}{61}$. Fiat $\frac{2r-18}{61}=s$; erit $r=$ $\frac{61s+18}{2}=30s+9+\frac{1}{2}s$. Fiat tandem $\frac{1}{2}s=t$; erit $s=2t$. Hinc $r=61t+9$, $q=63t+9$; $p=187t+27$; $y=q=63+9$. Ergo $187y+52$ $=11781t+1735$ erit numerus quæsitus.

Quod si numerus imperatus præter quatuor allatas conditiones quintam etiam ita includere debuisset, ut divisus per a relinqueret b, tunc prima æquatio fuisset $11781x+1735=ay+b$; & ita procedendum, si plures quam quinque fuerint hujusmodi conditiones.

333. *Scholion* III. In valore novissime reperto $11781t+1735$ (ubi numerus 11781 per indeterminatam t multiplicandus major est subsequente 1735) si ponatur $t=0$, liquet, remanere numerum 1735 omnium quæsitorum minimum, quod in pari casu semper accidet, ubi nempe numerus repertus sit $At+B$, & $A>B$. At si in numero reperto $At+B$ sit $A<B$; tunc pro indeterminata qualibet t numeri negativi -1, -2, -3, &c. accipiantur, donec numerorum $At+B$ ultimus affirmativus obtineatur, qui erit ex imperatis minimus. Sit si fuerit $2184t+9883$; sumendo $t=-4$, numerus ille minimus est 1147. Si numerus in-

inventus sit $At-B$, ubi $A<B$; tunc pro t subrogandi sunt numeri affirmativi 2, 3, 4, &c. donec deveniatur ad primum numerum affirmativum, qui ceterorum, in quos cadit quæstio, erit minimus. Si tandem in numero invento $At-B$ sit $A>B$; substituta pro t unitate affirmativa, numerus erit quæsitorum minimus. Multa, eaque præclara quoad analysim indeterminatam hic addi possent, quæ Tiro, secundum Algebræ Eulerianæ Tomum attente percurrendo, sibi comparabit.

CAPUT VIII.

DE ALGEBRÆ AD GEOMETRIAM ELEMENTAREM APPLICATIONE.

Monita.

334. Figuræ quælibet geometricæ per characteres algebricos designari possunt, & vicissim expressiones algebricæ possunt per figuras geometricas repræsentari, adeo ut Algebra Geometriæ applicetur, & Algebræ Geometria; primum fit in Problematum resolutione, alterum in Problematum constructione.

335. Alia est unitas arithmetica, alia geometrica. Prima nec numeros, nec quantitates geometricas immutat, quod $1\times a$ designat tantummodo numerum quantitatum a, quæ adsumuntur, eo plane modo, quo $2a$, $3a$ idem indicant. Eadem ratione

si unitas numerica dividit a, ut $\frac{a}{1}$, eam non mutat, quia $\frac{a}{1} = \frac{1 \times a}{1} = a$, quod accidit etiam in $\frac{ab}{1}$, quia $\frac{ab}{1} = \frac{1 \cdot a}{1} \times \frac{1 \cdot b}{1} = ab$. Secus autem evenit, si de unitate geometrica sermo sit; tunc enim unitas vel lineam, vel superficiem, vel solidum denotare potest. Sic si de lineis agatur, ab, vel $\frac{ab}{1}$, quæ aliàs planum exprimit, tunc exprimet lineam, quartam scilicet proportionalem post 1, a, b, ita ut fieri debeat analogia $1 : a = b : \frac{ab}{1}$, in qua pro unitate linea sumenda est, & formula $\frac{ab}{1}$ per triangula similia construenda. Itidem magnitudo a^3, quæ cubum repræsentare solet, repræsentare pariter potest lineam per analogias hasce inveniendam, nempe $1 : a = a : aa = aa : a^3$. Idem de a^4, a^5 &c. intelligendum, quavis istæ sint magnitudines impossibiles in Geometria, quæ trinam dimensionem non excedit. Similiter abc, quæ solidum exhibere solet, lineam exhibere etiam potest per has analogias $1 : a = b : ab$, & $1 : ab = c : abc$.

Si

Si de planis agatur, habeaturque $1 \times a$; unitas lineam indicabit; si de solidis, quadratum exprimet. Generatim unitas geometrica supplere debet quidquid oportet, ut terminus, vel formula evadant ejus generis, quod conditiones exposcunt.

336. Si in aliquo Problemate una tantum adsit quantitas cognita, vel constans, illa pro unitate sumi potest; sic in circulo radius vel diameter, in parabola parameter pro unitate accipiuntur. Si vero plures adsint quantitates cognitæ, seu constantes, una tantum pro unitate sumi potest, & illa tunc est ceteris præferenda, quæ ad calculi compendium magis conducit. Generatim hac de re advertendum, quod si prius unitas non determinetur, omnes termini, qui lineæ, vel plani, vel solidi expressionem ingrediuntur, eandem habere debent in exponentium aggregatis dimensionem, secus aliquis in calculum error irrepsit. At si unitas sit determinata, ac termini exacto calculo, homogeneorum legem non servent, tunc unitas est subintelligenda, quæ minores quam par est dimensiones multiplicatione sustollat, vel majores divisione deprimat. Sic si post adsumptam unitatem pro a, æquatio finalis prodeat $x^2 + b^2 - 1 = 0$, vel $x^2 = 1 - b^2$, quoniam hic agitur de quadratis, seu de superficiebus, a^2 supplere debet pro 1, ut fiat $x^2 = a^2 - b^2$. Item si in eadem hypothesi fuerit $x^3 = b^3y^3 + c$, æquatio ad homogeneitatem reducta erit $x^3 = \frac{b^3y^3}{a^3} + a^2c$.

337.

337. In omni Problemate resolvendo vel adsunt lineæ, quæ dantur positione tantum, vel tantum magnitudine, vel positione ac magnitudine conjunctim. Quæ dantur positione, situm habent invariabilem, sed longitudinem indeterminatam, velut tangens ducta ex dato circumferentiæ circuli puncto. Quæ dantur magnitudine, quamvis situm varient, magnitudinem non variant, velut radius, ac circuli diameter; Istæ *cognitæ*, aut *constantes*, ut supra innuimus, appellantur. Quæ dantur positione simul, & magnitudine, variant longitudinem, dum situm variant, velut perpendicularis super circuli diametro erecta, & circumferentia terminata; Hæc enim situm variando variat longitudinem, prout vel ad centrum magis appropinquat, vel ab eo magis recedit. Hujusmodi lineæ vocantur *incognitæ*, vel *indeterminatæ*, vel *variabiles*.

338 Linea ex una parte poni potest indeterminata, dum ex altera est determinata, & cognita. Sic si ambæ lineæ AB (*Fig. 6.*) extremitates sint determinatæ, linea AB erit cognita; sed si lineæ AP extremitas altera P sit indeterminata, AP lineam incognitam repræsentabit. Quod si ponatur, punctum P moveri versus A, linea $A(P)$ lineas, quæ fiunt gradatim minores quam AP, indicabit. Sin autem idem punctum P punctum A hoc in motu transgrediatur, ac versus p per eandem directionem incedat, Ap per ea, quæ sub initium demonstravimus (18.), erit quantitas negativa, adeo ut si fiat $Ap = AP$, & AP dicatur x, erit $Ap = -x$. Pari

ri ratione si AM indicetur per y, æqualis ejus protractio Am in plagam oppositam per $-y$ designabitur.

339. Radix imaginaria, vel impossibilis per Algebram exprimitur, per Geometriam vero exprimi nequit; Algebra enim solutionem exhibet generalem pro casibus omnibus possibilibus, & impossibilibus, quos secundos exprimit per quantitates imaginarias, qua occasione non modo limites ostendit, inter quos possibile consistit, sed ex quantitatibus imaginariis rite tractatis quantitatem prorsus realem nonnunquam elicit, ut jam indicavimus (130.); quod non sine admiratione percipient, qui hæc amœnissima studia prosequi non renuent.

340. Dum in Problematis alicujus solutione ad æquationem finalem perventum est, in qua incognitæ valor in quantitatibus prorsus cognitis innotescit, problema resolutum est determinatum. At si valor ille quantitatem aliquam incognitam adhuc includat, Problema est indeterminatum, quo in casu aliqua linea pro hac incognita ad arbitrium adsumi potest, nisi hoc Problematis vetet natura.

341. Si in æquatione finali prodeat incognita æqualis zero, vel pars toti æqualis, vel quantitas positiva sibimet ipsi negativæ æqualis, vel incognitæ valor imaginarius emergat, hæc absurda indicant, quæsitum propositum esse sibi ipsi repugnantem ob aliquam in adjectis circumstantiis conditionem impossibilem.

342. Si in æquatione finali utraque ejus membra fiant perfecte similia, ut $an = an$, vel $0 = 0$, quæ æquatio dicitur *identica*, hoc admonet, rem ita se ha-

habere, ut adſumpta in Propoſitione fuit, adeoque Propoſitionem non eſſe Problema, ſed Theorema. Id ex. gr. eveniret, ſi quæreretur triangulum rectangulum, in quo quadratum hypothenuſæ ſit æquale duobus reliquorum laterum quadratis.

343. Propoſitio I. *Regulas præcipuas pro reſolutione Problematum indaganda exhibere.*

Reſolutio I. Concipiatur jam inventum eſſe quod quæritur; proindeque figura deſcribatur, quæ omnes Problematis exprimat conditiones; tunc autem tam cognitas, vel datas, quam incognitas, vel quæſitas, nullo habito diſcrimine, tractando prout expoſitæ conditiones requirunt, ad unam vel plures æquationes pro incognitarum numero deveniatur; quidquid enim in Problemate proponitur reſolvendum, vel alicui rei eſſe debet æquale, vel in data aliqua ratione, quod ſecundum quum analogiam includat, includit ſimul æquationem. Præſtat tamen interdum artificium ita dirigere, ut quantitatis ejuſdem incognitam continentis duæ inveniantur expreſſiones diverſæ, & inter ipſas æquatio inſtituatur, ut nuper egimus in problematum arithmeticorum reſolutione (304. 313.).

II. Si ad æquationes iſtas eruendas figura ſecundum Problematis conditiones deſcripta non ſufficiat, jungantur puncta, protrahantur lineæ, vel novæ agantur, quæ ad ſolutionem putantur magis idoneæ, ac triangula rectangula conſtruantur; ad quæ omnia praſtanda nulla certa Regula tradi poteſt, quum omne artificium ex Problematis circumſtantiis, ex induſtria, & exercitatione, quin etiam ex caſu

R in-

interdum dependeat. Reliquis præferuntur perpendiculares, circulorumque descriptiones, potissimum vero parallelæ, per quæ vel triangula similia actu efformantur, vel possunt efformari, ex quibus valores sine radicalibus plerumque obtinentur.

III. Lineæ in usum vocandæ alphabeti literis denominentur, pro incognita non semper quæsitam accipiendo, sed aliam ex cujus inventione quæsitæ valor emergere possit. Harum linearum selectus præcipuam attentionem sagacitatemque meretur, ne in calculum nimis implicatum incidamus; præstat ut plurimum eas adsumere, quæ cognitis sunt proximæ, quod cognitarum ope illæ aliquando exprimi possunt per additionem, vel subtractionem sine radicalium, quæ sæpe molestiam afferunt, interventu.

IV. Si anguli sint exprimendi, iis substituantur lineæ exhibentes eorum relationes, nimirum eorum sinus, cosinus, aliæque lineæ per Trigonometriam reperibiles.

V. Datum Problema in aliud, & quidem generalius, si fieri potest, convertatur, quod simpliciorem, si non generaliorem, præbeat solutionem. Hujusmodi transformatio magno est adjumento in Problematum faciliori, & ampliori solutione præstanda. Plura usus docebit.

344. Propositio II. *Æquationes simplices, seu primi gradus, geometrice construere.*

Resolutio. Fractiones datæ, quæ incognitæ valorem exprimunt, in analogiam resolvantur, facta prius, si oporteat, debita literarum substitutione; quo-

quoniam autem id multimodis perfici potest, exempla satius quam Regulæ rem declarabunt.

Sit itaque 1.° $x = \frac{ab}{c}$; fiat $c : a = b : k$; erit $k = \frac{ab}{c}$.

2.° Sit $x = \frac{abd}{ce}$; pro $\frac{ab}{c}$ substituatur k; fiet $\frac{abd}{ce} = \frac{kd}{e}$; hinc $e : d = k : m = \frac{abd}{ce}$.

3.° Sit $x = \frac{abdb}{cef}$; in locum $\frac{abd}{ce}$ sufficiatur m; fiet $\frac{mb}{f}$; ex quo $f : b = m : n = \frac{abdb}{cef}$; & ita porro; quare $x = \frac{ab}{c} + \frac{abd}{ce} - \frac{abdb}{cef} = k + m - n$.

4.° Sit $x = \frac{aa - bb}{c}$; quoniam $\frac{aa - bb}{c} = \frac{(a+b)(a-b)}{c}$, erit $c : a + b = a - b : x$.

5.° Sit $x = \frac{abc - cde}{dd + af}$. Quæratur $m = f + \frac{dd}{a}$, & habebitur $dd + af = am$, factaque substitu-

 tione,

tione, proveniet $x = \frac{abc - cde}{am} = \frac{bc}{m} - \frac{cde}{am}$, qui valores per *n.* 1, & 2 inveniuntur.

6.° Sit $x = \frac{a^3b + a^2c^2 - abcd}{a^2d + c^2d + bd^2}$. Quæratur recta æqualis denominatori per ad diviso, sitque $m = a + \frac{c^2}{a} + \frac{bd}{a}$; erit $adm = a^2d + c^2d + bd^2$; fiet igitur $x =$

$$\frac{a^3b + a^2c^2 - abcd}{adm} = \frac{a^2b}{dm} + \frac{ac^2}{dm} - \frac{bc}{m}.$$

7.° Sit $x = \frac{abc^2 - a^2b^2}{abc + c^3}$. Quæratur recta $m = \frac{ab}{c}$, eritque $cm = ab$, quo valore substituto, prodit $x = \frac{mc^3 - c^2m^2}{mc^2 + c^3} = \frac{mc - m^2}{m + c}$, quod dat analogiam $c + m : c - m = m : x$.

8.° Sit $x = \frac{a^2 + b^2}{c}$. Rectis $AB = a$ (*Fig.* 7.), & $BC = b$ ad angulum rectum inclinatis, construatur triangulum ABC; erit $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$, quæ

quæ dicatur m; habebimus $a^2 + b^2 = m^2$, propterea-que $n = \frac{a^2 + b^2}{c} = \frac{m^2}{c}$; hinc $c:m = m:n$.

9.° Sit $n = \frac{a^2 - b^2}{c}$. Descripto (*Fig.* 8.) super diametro $AB = a$ semicirculo, in eodem applicetur $AC = b$, jungaturque BC. Ob triangulum ACB rectangulum in C, erit $BC = \sqrt{a^2 - b^2}$, quo posito $= m$, fiet $a^2 - b^2 = m^2$, adeoque $n = \frac{a^2 - b^2}{c}$ $= \frac{m^2}{c}$, quod iterum dat $c:m = m:n$.

10.° Sit demum $n = \frac{a^2b + bcd}{af + bc}$. Dividatur supra & infra per b, eritque $n = \frac{a^2 + cd}{c + af:b}$. Fiat $\frac{af}{b}$ $= g$, erit $n = \frac{a^2 + cd}{c + g}$; qui valor ita construi potest. Inter $AC = c$ (*Fig.* 9.) & $CB = d$ quæratur media proportionalis $CD = \sqrt{cd}$; tum posita $CE = a$, junctaque DE, erit hæc $= \sqrt{a^2 + cd}$,

qua denominata m, erit $n = \frac{m^2}{c+g}$, unde $c + g : m = m : n$.

345. Propositio III. *Æquationes secundi gradus geometrice construere.*

Resolutio. Quoniam per ea, quæ jam diximus (305. 306.) æquationes quadraticæ ad simplices reduci possunt, patet, easdem per Problema præcedens, haud secus ac simplices, construi.

Sit enim I. æquatio pura $x^2 = ab$, erit $a : x = x : b$, vel radicem eliciendo, erit $x = \sqrt{ab}$; quare incognitæ x valor invenietur, si (*Fig.* 9.) inter $AC = a$, & $CB = b$ quæratur media proportionalis CD.

II. Sit æquatio $x^2 = a^2 + \frac{1}{4} b^2 - \frac{4c^2d^2}{ff}$. Sumatur hypothenusa m trianguli rectanguli, cujus latus unum $= a$, alterum $= \frac{1}{2} b$, inventaque $n = \frac{2cd}{f}$, prodibit $x^2 = m^2 - n^2$, & $x = \sqrt{m^2 - n^2}$; igitur in semicirculo (*Fig.* 8.), cujus diameter $AB = m$, applicata $AC = n$, erit $BC = \sqrt{m^2 - n^2}$.

III. Sit $x^2 - ax = b^2$; erit $x = \frac{1}{2} a \pm \sqrt{\frac{1}{4} a^2 + b^2}$ (*loc. cit.*), quæ æquatio velut simplex construitur.

IV.

IV. Generatim quæcumque secundi gradus æquatio ad unam ex duabus hisce formulis reducitur, nimirum $n^2 \pm pn - q = 0$, & $n \mp pn + q = 0$, intelligendo per p lineas omnes cognitas, quæ incognitam multiplicant, & pro q omnia plana cognita.

Constructio primæ Formulæ.

Ad primam formulam construendam, incognitæque n valorem inveniendum, sumatur (*Fig.* 10.) $CA = \frac{1}{2} p$ (dimidio quantitatis cognitæ secundi termini) cui ad angulos rectos insistat $AB = \sqrt{q}$, ita ut si fuerit $q = aa$, ponatur $AB = a$, si $q = ab$, ponatur $AB = \sqrt{ab}$; si $q = a^2 \pm b^2$, ponatur $AB = \sqrt{a^2 \pm b^2}$, & sic de ceteris. Tum centro C, radio CA descripto circulo, agatur per centrum recta BC occurrens circumferentiæ in duobus punctis E, F. Erit BE radix vera, BF falsa æquationis $x^2 + pn - q = 0$. Contra BF erit radix vera, BE falsa æquationis $n^2 - pn - q = 0$. Quum enim sit $CA = \frac{1}{2} p$, erit diameter AD, sive $FE = p$, quare posita $BE = n$, erit tota $FB = p + n$; sed $FB.BE = \overline{AB}^2$; ergo habetur $n^2 + pn = q$, sive $nn + pn - q = 0$.

Sit nunc $BF = -x$; erit BE, sive $BF - FE = -x - p$; quapropter iterum prodibit $FBE = x^2 + px = \overline{AB}^2 = q$, sive $x^2 + px - q = 0$.

Si contra statuatur $BF = x$, sive $BE = -x$, invenietur utroque modo $FBE = x^2 - px = q$, sive $x^2 - px - q = 0$.

Constructio secundæ Formulæ.

Pro altera formula, reliquis ut supra stantibus, ducatur BF parallela diametro AD (*Fig.* 11.) secans circumferentiam in punctis E, F, aganturque EG, FH rectæ AB parallelæ, adeoque æquales $\sqrt{q}$; erunt BE, BF duæ radices veræ æquationis $x^2 - px + q = 0$, & duæ falsæ æquationis $x^2 + px + q = 0$; posita enim BE, aut $AG = x$, erit $GD = p - x$; ac proinde $AG.GD = px - xx = \overline{GE}^2 = \overline{AB}^2 = q$, sive $xx - px + q = 0$.

Itidem si fiat BF, seu $AH = x$, erit $DH = p - x$, & idcirco $AH.HD = px - xx = \overline{HF}^2 = \overline{AB}^2 = q$; ex quo ut ante $xx - px + q = 0$.

Si ponatur $BE = AG = -x$, pariterque $BF = AH = -x$; quum sit in primo casu $GD = p + x$, in altero $HD = p + x$, invenietur $AG.GD$, & $AH.HD = -px - xx = \overline{GE}^2 = \overline{HF}^2 = q$, vi-

videlicet $xx+px+q=0$. Profecto si in æquatione $x^2-px+q=0$ utraque x, quæ erat positiva, ponatur negativa, fiet $x^2+px+q=0$; quod ad æquationem superiorem $xx+px-q=0$, utraque x e positiva in negativam mutata, potest applicari.

346. *Coroll.* Hinc facile dignoscitur, quod si diametro *AD* parallela *BF* nec secet, nec tangat circulum, duæ radices erunt imaginariæ ut jam monuimus (267.); at si eum ipsa contingat, duæ radices erunt invicem æquales.

347. *Scholion.* Quamvis æquationum cum simplicium, tum quadraticarum constructiones methodis exhibitis haberi possint, præstat ipsas super Problematum propositorum figuris, prout incognitæ valor analyticus indicat, concinnare, speciales enim circumstantiæ methodos elegantiores ad eas perficiendas rem attente consideranti suppeditabunt.

CAPUT IX.

PROBLEMATA GEOMETRICA.

348. PRoblema I. *Punctum in semicirculi peripheria invenire, ex quo ductis ad extremitates diametri duobus rectis, quadratum unius sit quintuplum quadrati alterius.*

Resolutio. Finge, jam factum esse quod quæritur, & punctum concursus in peripheria esto *C* [*Fig.* 12.], ex quo ad diametri *AB* extremitates *A*, *B* ductis *CA*,

CA, CB, demittatur ad eandem diametrum perpendicularis CD, ac fiat $AB = a$, $BD = x$; erit $AD = a - x$; fed $AB : BC = BC : BD$, nempe $a : BC = BC : x$; ergo $\overline{BC}^2 = ax$. Similiter quoniam $AB : AC = AC : AD$, five $a : AC = AC : a - x$, erit $\overline{AC}^2 = aa - ax$; Ergo per conditionem Problematis $aa - ax = 5ax$, ex quo $5ax + ax = 6ax = aa$, & $x = \frac{1}{6} a$. Sumpta igitur $BD = \frac{1}{6} AB$, & erecta ex puncto D ad occurfum peripheriæ perpendiculari DC, hæc determinabit punctum C, quod folvet Problema; ductis enim CA, CB, quadratum AC erit quintuplum quadrati CB. *Quod erat* &c.

349. *Coroll.* Ergo fi generalius ponatur, $\overline{AC}^2$ effe debere ad $\overline{CB}^2$, ut $m : n$, fiet analogia $aa - ax : ax = m : n$, ac proinde $max = naa - nax$, five $max + nax = naa$, ac tandem $x = \frac{na}{m+n}$. Igitur fi ponatur $m = 5$, $n = 3$, videlicet fi poftuletur $\overline{AC}^2 = \frac{5}{3} \overline{CB}^2$, erit $x = BD = \frac{3}{8} a = \frac{3}{8} AB$, &c.

Aliter. Statuatur in centro H incognitæ origo, ponaturque $AH = a$, $HD = x$; erit $AD = a + x$,

BD

$BD = a - x$, $\overline{CD}^2 = a^2 - x^2$, $\overline{AC}^2 = 2a^2 + 2ax$; quare $2a^2 + 2ax : 2a^2 - 2ax$, aut $a + x : a - x = m : n$; unde $ma - mx = na + nx$, five $mx + nx = ma - na$;

$x = \frac{(m-n)\,a}{m+n}$. Ut igitur Problematis habeatur solutio duo cafus funt diftinguendi, vel enim eft $m > n$, vel $m < n$; in primo cafu fumi debet radii HB portio $HD = \frac{m-n}{m+n}$; in altero quia quantitas $\frac{(m-n)\,a}{m+n}$ eft negativa, fumi debet $Hd = \frac{(m-n)}{m+n} AH$, in plaga fcilicet illi contraria, per quam progrediebatur portio affirmativa HD, incipiendo ab incognitæ origine H. Ex.gr. fi optetur $\overline{AC}^2 = 5\,\overline{BC}^2$, erit $m = 5$, $n = 1$, & $\frac{m-n}{m+n} = \frac{2}{3}$; fed fi poftuletur $5\,\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, tunc erit $m = 1$, $n = 5$, adeoque $\frac{m-n}{m+n} = -\frac{2}{3}$; utrumque vero cum prima folutione confentit.

Alio modo. Pofitis $AB = a$, $BC = x$, erit $\overline{BC}^2$ =

$= xx$, $\overline{AC}^2 = aa - xx$; quapropter $aa - xx : xx = m : n$; hinc $mx^2 = na^2 - nx^2$, five $mx^2 + nx^2 = na^2$;

adeoque $x^2 = \frac{na^2}{m+n}$; $x = \pm \sqrt{\frac{na^2}{m+n}}$. Itaque fi $m = 5$, $n = 1$, qui eft cafus problematis primo propofiti, prodiret $x = \pm \sqrt{\frac{1}{6}a^2}$. *Quod erat* &c.

Conftructio. Sumpta $BD = \frac{1}{6} AB$, & ex puncto D erecta normali DC ad occurfum peripheriæ, erit juncta $CB = x$; nam $a : x = x : \frac{1}{6} a$, adeoque $x^2 = \frac{1}{6} a^2$, & $x = \sqrt{\frac{1}{6}a^2}$. Altera radix $= - \sqrt{\frac{1}{6}a^2}$ huic cafui eft inutilis, quod in aliis problematum folutionibus interdum contingit. Hæc autem folutio quia radicis extractionem requirit, præcedentibus fimplicioribus eft pofthabenda.

350. *Scholion.* Quæ de quadratis demonftravimus, valent etiam de planis fimilibus quibufcumque latera AC, CB homologa habentibus, eorum enim areæ funt laterum homologorum quadratis proportionales.

351. Problema II. *In quolibet triangulo rectangulo cognitis area, & uno ex angulis non recto, latera invenire.*

Re-

Resolutio. Trianguli ABC [*Fig.* 7.] rectanguli in B, detur angulus C, area sit $= aa$, latus $BC = x$, sinus totus $= s$, tangens $= t$; erit $AB = aa : \frac{1}{2} x = \frac{2aa}{x}$. Quum itaque posita CB pro sinu toto, tangens sit AB, fiet ex Trigonometricis analogia $x : \frac{2aa}{x} = s : t$; quare $tx = \frac{2aas}{x}$; $xx = \frac{2aas}{t}$; $x = \pm \sqrt{\frac{2aas}{t}}$. *Quod erat* &c.

Constructio. Descripto angulo DEF [*Fig.* 13.] æquali angulo cognito C, positaque $FE = 2a$, excitetur ex puncto F normalis FD occurrens cruri ED in D; tum sumpta EF pro sinu toto, hæc erit etiam $= s$, & $FD = t$. Erigatur modo ex puncto E ipsi DE normalis EG protractam DF in G traiiciens; erit $t : s = 2a : \frac{2as}{t} = FG$. Fiat $FH = FG$, & $FI = \frac{1}{2} FE = a$, descriptoque super diametro HI semicirculo HKI, habebitur intercepta $FK = \sqrt{\frac{2aas}{t}}$; quapropter sumpta $FL = FK$, ductaque

LM

LM parallela *ED*, triangulum *MFL* erit illud quod petebatur. Eadem constructio in plagam oppositam pro signo negativo transferri potest.

352. *Coroll.* Si angulus cognitus *MLF* sit gr. 60, triangulum rectangulum *MFL* erit dimidium trianguli æquilateri, ac proinde *ML* erit unum ex lateribus æqualibus quæsitis; tunc autem stabit $s : t = 1 : \sqrt{3}$, ideoque valores substituendo, fiet $x = \sqrt{\frac{2aa}{\sqrt{3}}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$, cujus constructio est eadem cum superiori. Verum hujusmodi problemata, cum agitur de figuris quibuscumque regularibus, per communem geometriam sine algebræ subsidio solvi facillime possunt. Detur enim cujuslibet figuræ regularis area; sic latera inveniuntur. Sume ad arbitrium aliam figuram regularem ejusdem generis; quum ista, & illa, de qua quæritur, sint similes, erit ut recta, quæ potest aream figuræ arbitrario sumptæ, ad unum ex ejusdem lateribus, ita recta, quæ potest aream datam, ad quartam proportionalem, quæ unum constituet ex lateribus quæsitis.

353. Problema III. *Jaceat extra semicirculum* AMB (Fig. 14.) *in eodem plano recta* DE *utrinque indeterminata*, *&* *diametro* AB *parallela. Ex diametri puncto extremo* A *rectam* AE *ipsi* DE *occurrentem ita inclinare, ut pars intercepta* ME *inter datam rectam & circumferentiam, sit ad reliquam* MA *in data ratione* n : m.

Resolutio. Esto factum; & per punctum *M* transeat *PD* parallelis *AB*, *DE* normalis, ponaturque $AB = a$,

PD,

$PD = c$, $AP = x$, $PM = y$, $MD = z$; erunt $PB = a - x$, & $y + z = c$. Triangula similia APM, MDE dant $AM : ME = PM : MD$; ergo $PM : MD = y : z = m : n$, quare $y = \frac{mz}{n}$, quo valore suffecto in æquatione $y + z = c$, fit $\frac{mz}{n} + z = c$, & $z = \frac{nc}{m+n}$, adeoque $y = \frac{mc}{m+n}$. Igitur ex natura circuli habemus $\overline{PM}^2 = ax - xx = \frac{m^2c^2}{(m+n)^2}$, sive $x^2 - ax = -\frac{m^2c^2}{(m+n)^2}$; ex quo elicitur $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{m^2c^2}{(m+n)^2}}$. *Quod erat* &c.

Constructio. Super radio CF normali diametro AB describatur semicirculus FNC, in quo ex puncto F aptetur $FN = \frac{mc}{m+n}$, jungaturque CN; erit $\overline{CN}^2 = \overline{FC}^2 - \overline{FN}^2 = \frac{1}{4}aa - \frac{m^2c^2}{(m+n)^2}$, & $CN = \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{m^2c^2}{(m+n)^2}}$. Fiat $CP = CN$, erit AP

=

$= \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{m^2c^2}{(m+n)^2}}$; quapropter erecta ex puncto P normali PD, per punctum M interfectionis in peripheria agatur AME, hæc quæsito satisfaciet.

Quod attinet ad alteram radicem pariter affirmativam, ex radio AC rescinde $CQ = CN$, eritque $AQ = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{m^2c^2}{(m+n)^2}}$; hinc excitata ex puncto Q, normali QG usque ad peripheriam in G, ductaque AG occurrente ipsi DE in R, erit $AG : GR = m : n$.

354. *Coroll.* 1. Esse debet $\frac{m^2c^2}{(m+n)^2} < \frac{1}{4}aa$, secus radices forent imaginariæ, ideoque problema impossibile.

355. *Coroll.* 2. Si $m = n$, erit $ME = AM$, & $PM = MD$.

356. *Coroll.* 3. Si $c = a$, seu $AB = PD$, radices erunt $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}aa - \frac{m^2a^2}{(m+n)^2}}$; quare si ponatur $m = n$, prodibit $x = \frac{1}{2}a$; tunc autem punctum M cadet in F, & PD supra CF. Quod si fuerit $c = \frac{1}{2}a$, DE tanget circumferentiam in F, attamen duæ radices affirmativæ semper aderunt.

357.

357. Probl. IV. *Dato triangulo æquilatero* ABC (Fig. 15.), *intra istud, vel extra inter crura* AB, AC *producta, invenire punctum* H, *vel* h, *ex quo demissis ad crura normalibus* HE, HF, HG, *vel* hE, hf, hg, *aggregatum* HE + HF + HG *in primo casu, differentia* hf + hg — hE *in secundo adæquet normalem* AD *ex vertice* A *in basim* BC *demissam*.

Resolutio. Esto factum. Producatur bE, quæ secet crus AB in K, & occurrat cruri CA in L; nec non ductis EM, EN ipsis HF, HG parallelis ponatur $AB = BC = AC = 2a$, $AD = b$, $BE = x$, $HE = y$, $EC = BC - BE = 2a - x$. Ob triangula similia ABD, KBE habemus $BD : DA = BE : EK$, nempe $a : b = x : \frac{bx}{a} = EK$; quare $KH = KE - HE = \frac{bx}{a} - y$. Rursus ob triangula similia ACD, LCE fiat $CD : DA = CE : EL$, videlicet $a : b = 2a - x : 2b - \frac{bx}{a} = EL$; hinc $HL = EL - EH = 2b - \frac{bx}{a} - y$. Præterea triangula similia ABD, KFH dant $AB : BD = KH : HF$ nimirum, $2a : a = \frac{bx}{a} - y : \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y = HF$. Denique per triangula similia ACD,

LHG fit $AC:CD = LH:HG$, hoc eſt $2a:a = 2b - \frac{bx}{a} - y : b - \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y = HG$. Sed per hypotheſim eſſe debet. $HE + HF + HG = AD$; ergo $y + \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y + b - \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y = b$, ſeu $b = b$, vel. $0 = 0$; *Quod erat primum.*

Si ſtatuatur $Eb = y$, erit $Kb = KE + EH = \frac{bx}{a} + y$, $EL = 2b - \frac{bx}{a}$; $bL = EL + Eb = 2b - \frac{bx}{a} + y$. Triangula ſimilia ADB, Kbf exhibent $AB:BD = Kb:fb$, ſeu $2a:a = \frac{bx}{a} + y : \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}y = fb$; pariterque triangula ſimilia ACD, Lbg præbent $AC:CD = Lb:bg$, ſeu $2a:a = 2b - \frac{bx}{a} + y : b - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}y = bg$. At eſſe debet $bf + bg - bE = AE$; ergo $\frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}y + b - \frac{bx}{2a} + \frac{1}{2}y - y = b$, ſeu $b = b$, vel $0 = 0$; *Quod erat ſecundum.*

Pro-

Problema igitur convertitur in Theorema (342.), nimirum quomodocumque sumatur punctum H tam intra triangulum æquilaterum ABC, quam extra inter crura producta AB, AC, semper dictum aggregatum in primo casu, nec non exposita differentia in secundo trianguli ABC altitudinem AD adæquabunt; quod verum esse, ex geometrica quoque demonstratione potest comprobari.

358. *Coroll.* Si statuatur $y = 0$, fiet iterum in utroque casu $b = b$; ergo idem eveniet utcumque punctum H in recta BC accipiatur, semperque erit $HE + HF + HG = EM + EN = bf + bg - bE = AD$, quomodocumque dissita sint puncta H, b, E.

359. Animadverte interea, casus secundi demonstrationem ex eo quoque colligi posse, quod quum unica Eb in plagam vergat priori EH oppositam, ejus tantummodo signum sufficit immutare, adeoque formula evadet $bf + bg - bK$, ex qua ut supra elicitur $0 = 0$.

360. Problema V. *Triangulum invenire, cujus latera simul cum perpendiculo sint in geometrica continua proportione.*

Resolutio. Esto ABC (*Fig.* 16.) triangulum quæsitum, cujus perpendiculum DB. Quoniam ex conditione Problematis esse debet $AC : CB = CB : AB = AB : BD$, erit etiam $AC : CB = AB : BD$, quare triangula ABC, ABD sunt similia; sed triangulum ABD est rectangulum; ergo & triangulum quæsitum ABC debet esse rectangulum. Hoc præmisso, sit laterum angulum rectum efficientium alterum $AB = a$,

 al-

alterum $BC = x$; erit $AC = \frac{xx}{a}$; adeoque $\frac{x^4}{a^2} = a^2 + x^2$, five $\frac{x^4}{a^2} - x^2 = a^2$, five $x^4 - a^2x^2 - a^4 = 0$, quæ æquatio eſt quadratica derivativa ad formulam primam generalem $x^{2m} - 2px^m - q = 0$ pertinens (309.), in qua $m = 2$, cuique radix reſpondens eſt $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}aa \pm \frac{1}{2}a\sqrt{5aa}}$. Quatuor igitur erunt valores incognitæ x; ſed quantitas $\sqrt{5a^4} > a^4$; ergo $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{5aa}}$ erunt duæ radices imaginariæ, & $\pm \sqrt{\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{5aa}}$ duæ radices reales, altera poſitiva, altera negativa, ſed ambæ ejuſdem expreſſionis.

Conſtructio. Producta $AB = a$, ſumatur $BE = \sqrt{5aa}$, & $EF = \frac{1}{2}a$, deinde ſuper diametro AF deſcripto ſemicirculo AGF, excitetur normalis EG, quæ erit $= \sqrt{\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{5aa}}$; quapropter erecta ex puncto B normali $BC = EG$, junctaque AC, triangulum ABC erit illud quod quærebatur. Valor alter radicis negativæ eidem conſtructioni infra lineam AF conficiendæ inſervire poteſt.

Ali-

Aliter. Quoniam triangulum, de quo eſt ſermo, debet eſſe rectangulum, problema in ſequens convertitur.

Semicirculi ACD (Fig. 17.) *diametrum* AD *ita ſecare in* B, *ut erecta normali* BC, *major portio* BD *aequetur chordae oppoſitae* AC. Tunc enim latera trianguli ACB erunt in proportione geometrica continua.

Ponatur itaque $AD = a$, $AB = x$; erit $BD = a - x$, $AC = \sqrt{ax}$; quare ex conditione problematis habemus $a - x = \sqrt{ax}$; & quadrando, $xx - 2ax + aa = ax$, ſive $xx - 3ax + aa = 0$, unde eruitur

$$x = \frac{3a \pm \sqrt{5aa}}{2} = AB,$$ quae facillime obtinetur, radicem $\frac{3a - \sqrt{5aa}}{2}$ adhibendo, altera enim $\frac{3a + \sqrt{5aa}}{2}$ huic caſui eſt inutilis, quod ſi ea uti velimus, normalis BC caderet extra datum ſemicirculum.

361. *Coroll.* Quoniam aequatio ſuperior $xx - 2ax + aa = ax$ reſolvitur in analogiam $a : a - x = a - x : x$, liquet diametrum AD ſectam eſſe in B extrema, & media ratione, adeoque facilem evadere problematis propoſiti cum analyticam, tum ſyntheticam ſolutionem.

362. Problema VI. *Datis tribus lateribus triangulum conficientibus, trianguli aream invenire.*

Reſolutio. Sint AB, BC, AC (*Fig.* 18.) latera data, quae triangulum ABC componere, notum ſit; AB latus minus $= a$, BC medium $= b$, AC majus

$= c$; BD normalis e majori angulo ABC in basim AC demissa $= y$; $CD = x$. Quum angulus in C sit acutus, erit (*per* 13. 2. *Elem.*) $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2AC.CD$, hoc est $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$, ex quo $x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$; seu si ad calculi commodum ponatur $c^2 - a^2 = d$, erit $x = \frac{b^2 + d}{2c}$; adeoque $x^2 = \frac{b^4 + 2b^2d + d^2}{4c^2}$; hinc $y^2 = b^2 - x^2$ $= b^2 - \frac{b^4 - 2b^2d - d^2}{4c^2} = \frac{4b^2c^2 - b^4 - 2b^2d - d^2}{4c^2}$, & $4c^2y^2 = 4b^2c^2 - b^4 - 2b^2d - d^2 = (2bc - b^2 - d)$ $(2bc + b^2 + d)$ quod ex multiplicatione verum comperietur. Restituatur valor ipsius d; prodibit $4c^2y^2$ $= (2bc - b^2 - c^2 + a^2)(2bc + b^2 + c^2 - a^2) = -$ $\overline{(c-b)^2 + a^2} \times \overline{(b+c)^2 - a^2} = (\overline{a+b-c} \times$ $\overline{a-b+c}) (\overline{a+b+c} \times \overline{b+c-a})$, de quo veritas per multiplicationem constabit. Extrahatur radix; fiet $2cy = \sqrt{(\overline{a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a+c-b}}$ $\times \overline{b+c-a})$; proindeque dividendo per 4, habetur

tur $\frac{1}{2} cy = \sqrt{\frac{(a+b+c)}{2} \frac{(a+b-c)}{2} \frac{(a+c-b)}{2} \frac{(b+c-a)}{2}}$;

sed trianguli ABC area quæsita $= \frac{1}{2} cy$; ergo &c.

Quod erat &c.

363. *Coroll.* Hinc profluit Regula arithmetica ad Geometriam practicam utilis, quam Auctores communiter tradunt, nempe *Ex laterum semisumma subtrahantur singula latera, ut habeantur tres differentiæ, quæ invicem multiplicentur, earumque productum ducatur in ipsam laterum semisummam.* Hujus producti radix quadrata erit area trianguli quæsita. Sed hujusmodi Problematis resolutio numerica promptius per logarithmos expeditur; quum enim sit quoque $\frac{1}{2} cy =$

$\frac{1}{4} \sqrt{\overline{(a+b+c} \times \overline{a+b-c} \times \overline{a+c-b} \times \overline{b+c-a)}}$;

quatuor quantitatum $a+b+c$, $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$ logarithmi in unam summam colligantur, quæ bifariam dividatur, ut quoti logarithmici numerus naturalis in Tabulis respondens habeatur, cujus pars quarta aream quæsitam exhibebit.

364. *Scholion.* Celebris hujus Regulæ demonstrationem prorsus geometricam inventu sane perdifficilem, hic adnectere pro iis qui Geometriam tantum excolunt, opportunum arbitror.

Itaque latere maximo AC (supra quod demissa ut supra fuerit ex angulo opposito B perpendiculari

BD) utrinque producto, centris A, C, radiisque AB, CB describe semicirculos FBM, EBN. Habebis $MN = AB + AC + BC$; $ME = MA + AE = AB + AC - BC$; $FN = BC + CF = BC + CA - AB$; & quoniam ablata AC. ab aggregato $CE + AF$, remanet EF, erit $EF = CE + AF - AC = BC + AB - AC$; ac tandem $MN - EF = 2AC$, nam $MN = 2AF + FN = 2AE + 2EF + 2CE - EF = 2AE + 2CE + EF$.

Hisce præjactis, ob rectangula æqualia MDF, NDE, stabit $MD : DE = ND : DF$, ex qua sequentes prodeunt analogiæ

$MD + DN : ED + DF = ND : DF$, seu $MN : EF = ND . DF$
$MD - DE : MD = ND - DF : ND$, seu $ME : MD = NF : ND$
$MN - EF : EF = ND - DF : DF$, seu $2AC : EF = NF : FD$
$MN - EF : MN = ND - DF : ND$, seu $2AC : MN = FN . ND = ME : MD$.

Hinc æquantur rectangula $2AC . MD$, NME, pariterque $2AC . DF$, EFN. Valet igitur $AC . MD : AC . DF = \frac{1}{2} NME : \frac{1}{2} EFN$. Sed $AC . MD : AC . DB = MD : DB = DB : DF = AC . DB : AC . DF$. Ergo $\frac{1}{2} NME : AC . DB = AC . DB : \frac{1}{2} EFN$, sive $\frac{1}{4} NME : \frac{1}{2} AC . DB = \frac{1}{2} AC . DB : \frac{1}{4} EFN$. Unde colligimus, trianguli ABC aream quæsitam esse mediam proportionalem inter rectangula $\frac{1}{2} NM . \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} ME$, & $\frac{1}{2} EF . \frac{1}{2} FN$, sive (restitutis valoribus)

inter $\frac{(AB + AC + BC)}{2} . \frac{(AB + AC - BC)}{2}$ &

$\frac{(BC + AB - AC)}{2} . \frac{(BC + AC - AB)}{2}$; quare si ex duobus hisce rectangulis invicem ductis (postquam latera AB, AC, BC sint per numeros designata) extrahatur radix quadrata, hæc aream expetitam suppeditabit. *Quod erat* &c.

365. Problema VII. *Circulum describere, qui datum circulum, cujus centrum* C, (Fig. 19.) *tangat, ac per duo data puncta* A, B *in eodem plano posita transeat.*

Resolutio. Recta AB data puncta A, B jungente bifariam divisa in D, & ex puncto D excitata normali indefinita Df, liquet, in hac reperiri centrum circuli describendi. Finge, istud esse F. Ex eodem agantur FB, FC, quarum altera secabit circulum datum in puncto contactus quæsiti G, adeoque $FB = FG$. Ex centro C demissa in Df normali CE, ponatur $BD = a$, $DE = b$, $CE = c$, $CG = r$, $EF = x$, $FG = FB = y$; ergo $DF = b - x$, $FC = r + y$. Quum triangula FBD, CEF sint rectangula, habemus $\overline{CF}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{EF}^2$; $\overline{BF}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DF}^2$; sive $y^2 + 2ry + rr = cc + xx$; $y^2 =$

aa

$aa + bb - 2bx + xx$. Ex æquatione prima secundam detrahe; remanebit $2ry + rr = cc - aa - bb + 2bx$, sive $2ry = cc - aa - bb - rr + 2bx$. Statue $cc - aa - bb - rr = 2bd$. Fiet $2ry = 2bd + 2bx$, seu $ry = bd + bx$, unde $y : d + x = b : r$.

Constructio. Sume $EH = d$; erit $FH = d + x$. Fac præterea $b : r = r : \frac{rr}{b}$; stabit $y : d + x = r . \frac{rr}{b}$; quare posita $HI = \frac{rr}{b}$, ductaque IC, prodibit $GF : FH = CG : HI$, adeoque triangula FGH, FCI erunt similia. Si igitur facta $EI = d + \frac{rr}{b} =$

$$\frac{cc - aa - bb - rr + 2rr}{2b} = \frac{cc - aa - bb + rr}{2b},$$ jungatur IC, deinde secta $EH = d$, agatur HGg eidem IC parallela, hæc secabit in G circulum datum, ex cujus centro C per G ducta CGF usque ad occursum rectæ Df, punctum F determinabit, quod erit centrum imperatum.

366. *Coroll.* 1. Ex duabus intersectionibus G, g, quas efficit cum circulo dato recta HG, dignoscitur, duas esse Problematis solutiones; juncta enim gC, ac protracta usque ad occursum in f cum recta Df, præbet punctum f, quod est alterum centrum circuli iisdem conditionibus præditi, uterque enim circulus per puncta A, B, circulum datum tangendo, transibit.

367.

367. *Coroll.* 2. Si $EK = EB$, erit E centrum circuli quæsiti. At si $EK < EB$, centrum F erit ultra punctum E rectam AD versus; contra si $EK > EB$, centrum F erit citra punctum E. Primus casus patet; in secundo casu circulus radii $EB > FB$ secat circulum KGg progrediens trans punctum K; in tertio $EB < FB$ ad illum pervenire nequit, ideoque transit cis punctum K.

368. *Coroll.* 3. Si incognita $x = EF$ migrat in partem priori contrariam ratione habita ad punctum E, fit negativa, quare analogia evadet $y : d - x = r : \frac{rr}{b}$, quod constructionem non immutat.

369. *Coroll.* 4. Si $aa + bb + rr > cc$, tunc $d = \frac{cc - aa - bb - rr}{2b}$ erit quantitas negativa, & analogia stabit $y : x - d : r : \frac{rr}{b}$; ergo $EH = d$ est in partem (ratione habita ad punctum E) oppositam illi transferenda, quam monstrat figura, & constructio eadem persistit.

370. *Coroll.* 5. Si d evanescat, sive si punctum H cadat in E, tunc $d = \frac{cc - aa - bb - rr}{2b} = 0$; unde eruitur $cc = aa + bb + rr$.

371. *Coroll.* 6. Si circulus, cujus centrum C, rectam Df tangat, tunc $r = c$, & $d = -\left(\frac{aa}{2b} + \frac{1}{2}b\right)$; hinc

hinc *EH* situm illi contrarium, quem exhibet figura, occupabit, idque multo magis si circulus datus secet *Df* sine normalis *EC* evanescentia. At si *EC* evanescat, sive si centrum circuli dati sit in recta *Df*, tunc problema, quod duas semper recipit solutiones, eo reducitur, ut circulus describendus transeat per tria puncta data, adeoque evadit elementare.

372. Probl. VIII. *Dati quadrati* ABCD (Fig. 20.) *latere aliquo, puta* DC, *indefinite producto, ex angulo* A *rectam* AE *ita inclinare, ut intercepta* FE *sit datæ rectæ æqualis.*

Resolutio. Esto factum; & erecta ex puncto *E* normali *EG* lateri *AB* producto occurrente in *G*, nec non demissa ex eodem puncto *E* supra *AG* normali *AH*, triangula *ABF*, *EGH* erunt ob latus $AB = EH$ similia, & æqualia, quare $AF = EG$. Positis itaque $AB = a$, $EF = b$, $BG = x$, $AF = EG = y$, erunt $AG = a + x$, $AE = b + y$. Sed $AB : AF = AE : AG$; seu $a : y = b + y : a + x$; ergo $a^2 + ax = y^2 + by$, & $2a^2 + 2ax = 2y^2 + 2by$. Præterea quum ob $\overline{AG}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{EG}^2$ habeatur $a^2 + 2ax + xx = 2y^2 + 2by + b^2$, suffectis valoribus in prima æquatione inventis, prodit $a^2 + 2ax + xx = 2a^2 + 2ax + bb$, sive $xx = aa + bb$, ac tandem $x = \pm\sqrt{aa + bb}$.

Constructio. In *CE* producta secetur $CI = b$, erit $BI = \sqrt{aa + bb}$, cui æquales in *AB* utrinque protracta sume *BG*, *Bg*, tum super diametris *AG*, *Ag* descri-

ſcriptis ſemicirculis, puncta E, F', F'', f, in quibus iſti latus DC productum ſecant, problemati ſatisfaciunt.

373. *Coroll.* 1. Quatuor igitur admittit hoc Problema ſolutiones, ac proinde quatuor erunt interceptæ æquales rectæ datæ b, nimirum EF ſub angulo BCE; $E'F'$ ſub angulo DCE'; & eF'', $E''f$ ambæ ſub angulo BQD. Profecto problema ad quatuor dimenſiones aſcendiſſet, ſi BF, vel DE pro incognita ad ſolutionem abſolvendam adſumpta fuiſſet, ut calculum ineunti conſtabit, adeoque quatuor incognitæ valores prodiiſſent per methodos infra tradendas reperibiles. In allata vero ſolutione nonniſi duo eliciuntur incognitæ valores BG, Bg, quatuor tamen manentibus ſolutionibus; qua ſolutionis ſimplicitate monemur, quanta ſagacitate opus ſit, dum problematis alicujus ſolutionem aggredimur, ad incognitam reliquis præſtantiorem eligendam.

374. *Coroll.* 2. Duæ ſolutiones per ſemicirculum $AF'EG$ ſemper obtineri poſſunt; ſemicirculus enim iſte ſecare neceſſario debet latus CD, ut apertum eſt.

375. *Coroll.* 3. Duæ reliquæ interſectiones ex parte oppoſita, ſeu negativa poſſunt aliquando deficere; poteſt enim Ag eſſe major, vel minor dupla AD, vel ipſi æqualis. Si major; radius ſemicirculi $AF''g$ latus CD productam excedet, adeoque ſemicirculus latus hoc in duobus punctis ſecabit, duaſque præbebit ſolutiones. Si minor; radius dicti ſemicirculi minor erit latere AD, adeoque ſemicirculus ad latus CD protractum non perveniet; quum igitur nullæ adſint interſectiones, duæ radices negativæ

erunt

erunt impossibiles. Si æqualis; semicirculi radius lateri AD æqualis erit, adeoque semicirculus latus CD productum tanget; tunc autem duæ radices negativæ ex eodem contactus puncto discedentes, quum per idem punctum A transire debeant, coalescent, & hoc contactus punctum minimam rectam determinabit, quæ per punctum A sub angulo BCD duci potest.

376. *Coroll.* 4. Generatim si data b sit æqualis duplæ diametro BD dati quadrati, semicirculus ex parte negativa super A_3 descriptus tanget latus CD, & quatuor idcirco radices æquationis erunt reales, duabus in unam coëuntibus. Ergo si b major sit dupla diametro BD, semicirculus ex parte negativa secabit latus CD in duobus punctis, quapropter quatuor iterum radices erunt reales. Sin autem b minor sit dupla diametro DB, semicirculus nec tangit, nec secat latus CD, quapropter duæ radices erunt reales, ac duæ imaginariæ. Comparata igitur dupla diametro BD propositi quadrati cum data b, illico scire possumus, quatuor ne, an duas radices reales habeat æquatio.

377. *Scholion.* Hujus resolutionis demonstrationem geometricam non omnibus obviam hic lubet addere. Stantibus igitur quæ in constructione, junge FG. Quoniam triangula EGH, ABF sunt similia & æqualia, erit $\overline{HG}^2 = \overline{FB}^2$. Habemus præterea $\overline{FE}^2 + \overline{EG}^2 = \overline{FE}^2 + \overline{EH}^2 + \overline{HG}^2 = \overline{FG}^2 = \overline{GB}^2 + \overline{FB}^2$; ergo ablatis æqualibus $\overline{HG}^2$, $\overline{FB}^2$, remanebit $\overline{FE}^2 + \overline{EH}^2 = \overline{GB}^2 = \overline{AB}^2 + b^2$. Sed $\overline{EH}^2 = \overline{AB}^2$; ergo $\overline{FE}^2 = b^2$, & $FE = b$; *Quod erat primum.*

Jun-

Juncta $F'G$, & ex puncto F demissa super AB normali $F'L$, patet, triangulum AGF' esse simile & æquale triangulo EAG, quod quum de duobus etiam triangulis GLF', AEH sit verum, triangulum residuum ALF', seu ADF' erit æquale, ac simile triangulo residuo EGH, seu ABF; ergo $DF' = BF$, & $CF' = CF$; proinde ducta $AF'E'$ ad occursum in E' lateris BC protracti, quum triangula $CE'F'$, CEF sint & ipsa similia & æqualia, erit $F'E' = FE$; utraque igitur FE, $F'E'$ quæsito satisfacit; *Quod erat secundum.*

Centro B, radio Bg describatur circulus secans in K productam AD, junctaque BK, erit $\overline{BK}^2 = \overline{AB}^2 + b^2$, quare $\overline{AK}^2 = b^2$, & $AK = b$. Ex puncto f demitte supra diametrum Ag normalem fb, junge fg, & duc per punctum A rectam fE''. Triangula ABE'', Abf, Agf sunt similia; ergo $AB : AE'' = Af : Ag$, adeoque $AB \cdot Ag = AE'' \cdot Af$; sed $\overline{AK}^2 = \overline{BK}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{Bg}^2 - AB^2 = 2BA \cdot Ag + \overline{Ag}^2 = 2AE'' \cdot Af + \overline{Af}^2 + \overline{fg}^2 = 2AE'' \cdot Af + \overline{Af}^2 + \overline{AE''}^2 = \overline{E''f}$. Ergo $\overline{AK}^2 = \overline{E''f}^2$, & $AK = E''f = b$. *Quod erat tertium.*

Haud absimili ratiocinio demonstrabitur, ductam ex F'' per A rectam $F''Ae$ esse æqualem datæ b. *Quod erat quartum.*

CA-

CAPUT X.

DE ÆQUATIONUM RADICIBUS, QUÆ INUTILES CENSENTUR, ET DE SIGNO NEGATIVO.

378. Definitio. Problema problemati contrarium illud voco, in quo summa, quam incognitæ conditio princeps exigebat, vertitur in subtractionem, & vicissim.

379. Propositio I. *Cum æquatio problematis propositi solutioni inserviens duas exhibet radices positivas, quarum una problema resolvit, altera inutilis remanet, signum est, problema propositum, & problema ipsi contrarium eadem æquatione finali esse coërcitos.*

Nam duæ radices positivæ non possunt nisi ab eadem æquatione quadratica proficisci. En Exemplum. *Numerum quæro, cui addita sui decupli radice, summa evadat* $= 20$; *seu per expressionem algebricam* $x + \sqrt{10x} = 20$. Æquatio finalis erit $x^2 - 50x + 400 = 0$. Ista duas præbet radices positivas 10, & 40, quarum prima 10 solvit problema, altera 40 inutili remanente. At si problema sic enuncies; *Numerum invenire, ex quo subducta sui decupli radice, residuum sit* $= 20$, *seu* $x - \sqrt{10x} = 20$, æquatio finalis fit iterum $x^2 - 50x + 400 = 0$, quæ easdem idcirco radices continet, sed altera tantum 40, quæ prius erat inutilis, hic solvit problema, & altera vicissim 10, quæ prius solvebat problema, hic evadit

dit inutilis; nec aliter fieri poterat, in utroque enim problemate solvendo eadem occurrit æquatio.

380. *Coroll.* 1. Ergo hujusmodi problemata unam tantum admittunt solutionem, si enim duas admittere possent, problema propositum, & contrarium forent identica, quod repugnat.

381. *Coroll.* 2. Si ambæ radices positivæ quadraticum solvunt problema, hoc in contrarium verti non potest, nisi radices positivæ evadant negativæ, de quibus infra.

382. Propositio II. *Si æquatio ex problematis dati conditionibus emergens duas continet radices, positivam alteram, quæ problemati satisfacit, alteram negativam, quæ remanet inutilis; hoc indicat, quod si problema contrariè enuncietur, tunc radix, quæ prius erat negativa, in positivam conversa problema oppositum solvit, & illa vicissim, quæ prius erat positiva in negativam translata remanet inutilis.*

Si enim ceteris manentibus, princeps problematis conditio in contrarium sensum mutetur, æquationis finalis quantitates eædem persistent, hoc tantum cum discrimine quod signum positivum incognitam afficiens mutatur in negativum, & vicissim; at id problematis conditionem invertit; ergo etiam æquationis prioris radices in oppositas migrent, necesse est. Ut id per Exemplum quoque demonstrem, in memoriam revocanda est Propositio III. Cap. VI. (311.), in cujus resolutione vidimus, æquationem finalem $x^2 - 2x - 35 = 0$ duas præbuisse radices, nimirum 7, & -5, quarum prima quæstionem sol-

vit, altera minime; sed si Propositio in sensum contrarium vertatur, huc redibit.

Nonnulli Convivæ solvere pro prandio debebant solidos 175, sed alii duo extranei, qui sub prandii finem supervenientes aliquid degustarunt, sese impensæ participes pro æquali cum ceteris portione obtulerunt; ex quo factum est, ut dicti Convivæ 10 solidos minus quam ipsis obtingebat, singuli erogarent. Quæritur Convivarum numerus, ac pretium a singulis solutum?

Peractis operationibus, prima æquatio prodit $\frac{175}{x} - \frac{175}{x+2} = 10$, & æquatio finalis $x^2 + 2x - 35 = 0$, cujus duæ radices sunt 5, & -7, quarum prima tantum quæstionem enodat; si enim convivæ ponantur 5, singulis obtigissent solidi $\frac{175}{5} = 35$, sed duobus, qui supervenerant, computatis, unicuique obtingunt solidi $\frac{175}{7} = 25$, adeoque singuli Convivæ decem solidos minus quam debuissent impendunt, quod problematis conditioni satisfacit. Altera radix -7 ad convivarum numerum pertinere non potest, quare illa, quæ prius problema solvebat, hic remanet inutilis, proficua vicissim facta illa, cujus antea nullus erat usus, quod a contrariis æqua-

æquationibus finalibus $x^2 - 2x = 35$, $x^2 + 2x = 35$ proficisci, nemo est qui non videat.

383. *Coroll.* 1. Cum altera ex duabus radicibus, quas exhibet problematis solutio, est inutilis, signum est, unam tantum admittere posse problema resolutionem; quod de problemate quoque contrario est statuendum.

384. *Coroll.* 2. Radices inutiles non sunt ad calculi superfluitatem, seu ad scientiæ imperfectionem referendæ, neque enim e problematis conditionibus omnes eruuntur, sed ad æquationem ex problematis resolutione prodeuntem legitime pertinent, ad quam idcirco æquationem problema velut casus particularis accommodatur. Profecto postrema operatio pro radicibus eliciendis versat non circa problema, sed circa æquationem, quod in problematis quoque geometricis accidere posse mox ostendam; nec methodus rectificari potest, cum eadem æquatio duobus casibus oppositis, ut vidimus in antecedente, satisfacit.

385. Propositio III. *Si in Problematis resolutione oritur æquatio radices omnes continens negativas, problematis enunciatio inverse facta fuit, adeoque rectificanda.*

Quæratur ex. gr. numerus, qui numero 30 additus efficiat 16. Posito numero quæsito $= x$, fiet $x + 30 = 16$, sive $x = 16 - 30 = -14$; æquatio ista $x = -14$ indicat, problema sic esse invertendum; *Numerum invenire, qui a 30 subductus relinquat 16 pro residuo*; tunc autem fiet $30 - x = 16$, adeoque $x = 30 - 16 = 14$.

Similiter numerum quæro, cui addita unitate, aggregati quadratum fit $\frac{1}{4}$. Æquatio erit $(x+1)^2$, seu $x^2+2x+1=\frac{1}{4}$, ex qua duæ eruuntur radices ambæ negativæ $x=-\frac{1}{2}$, $x=-\frac{3}{2}$. Docent istæ, problematis enunciationem sic esse invertendam; *Numerum invenire, quo ab unitate subducto, quadratum residuum sit* $\frac{1}{4}$; nempe $(1-x)^2$, vel $(x-1)^2=x^2-2x+1=\frac{1}{4}$; tunc enim radices $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ evadunt ambæ positivæ.

386. Propositio IV. *Si problema conditiones in enunciatione absurdas involvens præbeat radices imaginarias, etiam suum contrarium radices imaginarias exhibebit.*

Inveniri enim debeat numerus x, ita ut fiat $(1+x)^2=-9$, erit $x=-1\pm\sqrt{-9}$. Inveniendus præterea sit numerus x, ita ut fiat $(1-x)^2$, vel $(x-1)^2=-9$; prodibit $x=1\pm\sqrt{-9}$. Generatim si ponatur $(1\pm x)^{2n}=-p$, ubi n indicat nu-

numerum integrum affirmativum, erit $x = \mp 1 \pm \sqrt[2n]{-p}$, quæ quantitas semper emergit imaginaria.

387. Propositio V. *Methodus minus perfecta, quæ in problematis propositi resolutione adhibetur, varias radices inutiles seu reales, seu imaginarias secum adducit, æquationem efformando radices istas proferentem.*

Hujus veritatis exempla vidimus in Capite præcedente, nimirum in tertia solutione Probl. I. in Probl. V. & VIII. Esto præterea æquatio $y = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}$ ad simpliciorem formam reducenda. Fiat $y\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 1$; quandrando, erit $10y^2 + 2y^2\sqrt{5} = 6 - 2\sqrt{5}$; hinc $(2y^2 + 2)\sqrt{5} = 6 - 10y^2$, hoc est $(y^2 + 1)\sqrt{5} = 3 - 5y^2$; & rursus quadrando, fiet $5y^4 + 10y^2 + 5 = 9 - 30y^2 + 25y^4$, nimirum $20y^4 - 40y^2 = -4$, sive $y^4 - 2y^2 = -\frac{1}{5}$, quæ est æquatio quadratica derivativa, ex qua extracta radice quadrata, prodit $y^2 - 1 = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$, seu $y^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{4}{5}}$, quare $y = \pm\sqrt{1 \pm 2\sqrt{\frac{1}{5}}}$. Hæc methodus quatuor exhibet radices, quarum quæ seligenda sit, ignoramus. Tentetur igitur alia methodus jam exposita (113. n. II.) fiatque $\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{6 - 2\sqrt{5}} \times \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \times \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$

$$= \sqrt{\frac{80 - 32\sqrt{5}}{80}} = \sqrt{\frac{5.16 - 2.16\sqrt{5}}{5.16}} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{2}{5}\sqrt{5}} = \sqrt{1 - 2\sqrt{\frac{1}{5}}}$$; adeoque $y = \sqrt{1 - 2\sqrt{\frac{1}{5}}}$, qui eſt verus valor quæſitus.

388. Propoſitio VI. *Si in Problematum geometricorum reſolutione duas æquatio finalis ſuppeditet radices vel utraſque poſitivas, vel alteram poſitivam, alteram negativam, & una ex hiſce ſit problemati reſolvendo inutilis; iſta vel problema contrarium reſolvet, vel aliud generalius reſpiciet problema, cujus problema propoſitum eſt caſus particularis.*

In tertia ſolutione primi Problematis in Cap. præcedenti propoſiti vidimus, radicem negativam $-\sqrt{\frac{na^2}{m+n}}$ inutilem remanſiſſe. Sed ſi rem attente perpendas, percipies, æquationem hac occaſione genitam alius problematis a ſemicirculo non dependentis reſolutionem reſpicere, cujus hæc eſt enunciatio; *Data recta* AB (*Fig.* 21.), *portionem* BC *ita addere, ut ſit* $\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 : \overline{BC}^2 = m : n$; *ſeu poſitis* $AB = a$, $BC = x$, *ſit* $a^2 - x^2 : x^2 = m : n$; Hinc habetur ut ſupra (*loc. cit.*) $mx^2 = na^2 - nx^2$, ac tandem $x = \pm \sqrt{\frac{na^2}{m+n}}$, ubi dignoſcitur, radicem negativam problemati contrario inſervire, ut in problematis arithmeticis animadvertimus, nempe *a data recta* AB *portionem* Bc *ita reſcindere*,

dere, ut fiat $\overline{AB}^2 - Bc : \overline{Bc}^2 = m : n$; ex quo statim apparet, Bc, quæ in oppositam plagam comparate ad BC vergit, radicem negativam positivæ quoad magnitudinem æqualem repræsentare.

Pergo ad aliud Exemplum, problematis V. in eodem Cap. antecedenti existentis resolutionem revocando. Ibi animadvertimus problema propositum per rectæ in extrema, & media ratione divisionem resolvi posse, adeoque radicem $\frac{3a + \sqrt{5aa}}{2}$ inutilem ad hoc præstandum fuisse; ex quo statim conjicitur, problema propositum esse problematis generalioris vel casum particularem, vel corollarium. Superest igitur demonstrandum, radicem illam, quæ dicto problemati inutilis reperta fuit, problemati, quod rectæ in extrema & mediæ ratione divisionem requirit, utilem esse. Pro quo quum incognitæ origo sit in A [*Fig.* 17.], & radix $\frac{3a + \sqrt{5aa}}{2}$ sit positiva, producatur AD in E, ita ut sit $AE = \frac{3a + \sqrt{5aa}}{2}$, erit AE secta per punctum D in extrema, & media ratione, nimirum vi analogiæ $a : a - x = a - x : x$, stabit $AD : DE = DE : AE$; siquidem substitutis valoribus, habemus $a : a - \frac{3a + \sqrt{5aa}}{2} = a -$

$\frac{3a+\sqrt{5aa}}{2} : \frac{3a+\sqrt{5aa}}{2}$, quæ analogia certa est, ut constat media & extrema multiplicando; nec refert, esse DE $\left(=a-\frac{3a+\sqrt{5aa}}{2}\right)$ quantitatem negativam, quippe quæ adæquat $AD-AE=-DE$, etenim ex analogia $AD:-DE=-DE:AE$ fit itidem $AD\times AE=\overline{DE}^2$, quod productum resolvi rursus potest in analogiam $AD:DE=DE:AE$. Fiat itaque $AE:DE=AD:DB$, vel $AE:AD=AD:AB$. Propter $DE:AE=BD:AD$ habemus

$AE:AD=AD:AB$

$DE:AD=BD:AB$; sed est etiam $AE:DE=AD:DB$, nec non $AE:DE=DE:AD$; ergo ex æquo $AD:DB=DB:AB$. Ergo radix, quæ inutilis erat pro dato problemate resolvendo, utilis reperta est pro alio generaliori, quod neque est contrarium primo, neque ab illo dependet.

389. Prop. VII. *Si detur* $x>m-n$ (*m, n sunt numeri integri positivi*), *& signa sint immutanda; dico, fieri debere* $-x<-m+n$, *non autem* $-x>-m+n$.

Nam stante $x>m-n$, addatur utrinque $n-m-x$; fiet $n-m-x+x>n-m-x+m-n$, sive $n-m>-x$, sive $-x<-m+n$.

390. *Coroll.* 1. Hinc si $n=m$, erit $x>0$, & $-x<0$, seu *quantitas quævis integra positiva est major nihilo, negativa minor*; Quod ita brevius ostenditur. Habemus $a-n<a$; ergo $-n<a-a$, seu $-n<0$.

391.

391. *Coroll.* 2. Quum in prima formula $n > m - n$ maximus numerus per m designatus sit $= n$, & minimus per n sit $= 1$, maxima quantitas $-m + n$ in secunda formula erit $-n + 1$, adeoque $-n < -n + 1$ indicat, quantitates negativas eo fieri minores, quo plus crescit numerus signo affectus negativo; sic si $n = 6$, erit $-6 < -5$, si $n = 6, m = 3, n = 2$, erit $-6 < -1$, &c. Præterea si quantitas negativa per Corollarium antecedens est minor nihilo, quo quantitas positiva quælibet est major, quantitas negativa erit potiori jure positiva qualibet minor. Hoc & antecedens corollarium jam ostensa (18. n. 3.) confirmant.

392. *Coroll.* 3. Ex superiori expressione $-n < 0$, sequitur esse $\frac{1}{0} < \frac{1}{-n}$, seu $\frac{1}{-n} > \infty$, quod cum superioribus (92.) congruit, ubi statim conspicitur, singulas fractiones negativas $\frac{1}{-1}$, $\frac{1}{-2}$, $\frac{1}{-3}$, &c. esse majores quam $\frac{1}{0}$.

393. *Coroll.* 4. Si n, m, n sint numeri fracti, eadem computandi ratio, sed inverse, locum obtinet. Esto ex. gr. $n = \frac{1}{2}$, $m = \frac{2}{3}$, $n = \frac{1}{3}$, ut fiat $\frac{1}{2} > \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$; erit $-\frac{1}{2} < -\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$; quod

quod etiam demonstrat, numerorum negativorum $\frac{1}{-2}$, & $\frac{1}{-3}$ in series resolutio (91.), crescit enim seriei valor, quo plus fractionis negativæ crescit denominator.

394. *Scholion.* Concludamus igitur, idem signum negativum varias in Algebra induere posse personas; nunc enim (1.°) indicat, quantitatem aliquam aliis adjunctam ab ipsis esse subtrahendam. (2.°) Nunc omnes Problematis conditiones esse cum enunciatione invertendas. (3.°) Nunc quantitatem inventam mutationem subire contrariam illi, quam haberet, si fuisset positiva. (4.°) Nunc æquationis radicem negativam inutilem, utilem evadere, si Problematis enunciatio immutetur; ubi advertendum, secundum, tertium, & quartum numerum tunc locum habere, cum quantitas negativa solitaria occurrit. (5.°) Nunc quantitatem evasisse minimam, veluti $-a < 0$. (6.°) Nunc maximam, veluti $\frac{1}{-a} > \infty$. Quare singuli isti casus sunt a reliquis singulis pro re nata distinguendi. Quin etiam animadvertendum, quantitatem quoque fractam negativam esse per demonstrata (347.) minorem nihilo; sed hac restrictione, ut cum habetur $-n < 0$, fit $\frac{1}{-n} > \infty$; & cum occurrit $\frac{1}{-n} < 0$, fit $-n > \infty$; secus si hujusmodi negle-

cta

cta conditione ponatur ad arbitrium $-n < 0$; & $-n > \infty$, prodiret $0 > \infty$, quod est absurdum.

395. Diu, fateor, multumque anceps hæseram antequam magnitudinum negativarum novissimis hisce Corollariis expositarum affectionibus, quæ mihi monstra videbantur, assensum præbuissem; sed quum hujus Propositionis exactam demonstrationem (qua corruente, calculi principia corruerent) nunquam evertere potuerim, tandem victas manus dedi, ratus, Algebram tractandam esse secundum sua, non secundum aliena principia. Nec refert, conclusiones ex inconcussis supputandi legibus rite deductas sub paradoxi specie interdum erumpere, quæ enim improbabilia videntur, sæpius evadunt per concinnam calculi tractationem, applicationemque proficua. Profecto si per veritates ad hujusmodi paradoxa pervenimus, ista quoque ad alias veritates ob eandem rationem nos vicissim adducent. Sic radices imaginariæ in Analyticis rem magnam præstant, quamvis impossibilis earum existentia censeatur.

CAPUT XI.

DE COMBINATIONIBUS, ET PERMUTATIONIBUS.

396. PRopositio I. *Dato quantitatum numero quolibet, possibiles omnes earum combinationes, si binæ, ternæ, quaternæ, quinæ &c. accipiantur, invenire.*

Re-

Resolutio. Concipe quinque quantitates a, b, c, d, e; si earum unam in reliquas singulas multiplicare cupias, ut scias, quot modis binæ (rejectis singularum in semet ipsas multiplicationibus) combinari possint, producta erunt

$$\begin{matrix} ab, & ac, & ad, & ae \\ ba, & bc, & bd, & be \\ ca, & cb, & cd, & ce \\ da, & db, & dc, & de \\ ea, & eb, & ec, & ed \end{matrix}$$

ubi vides, dum singulas per reliquas multiplicas, omnium quantitatum numerum in eundem numerum unitate dempta ducendum esse; quare posito earum numero $= m$, numerus, quo cuncta producta binaria exprimuntur, erit $m(m-1)$. Sed adverto, productum quodlibet binarium, velut ab, ba, esse in hac operatione bis repetitum; ergo quoniam $ab = ba$, ut quantitatum binarum numerus simplex ad quæsiti formam habeatur, dicta formula per 2 dividi debet, ac fiet $\frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2}$.

Ut ipsarum a, b, c, d, e, quæ ternæ sint adsumendæ, numerus, in quo nulla semet ipsam multiplicet, investigetur, binæ jam repertæ sunt per tres reliquas multiplicandæ, videlicet duci debet ab in singulas reliquas c, d, e, quas non continet, & sic de ceteris; quocirca $\frac{m(m-1)}{1 \,.\, 2} \times (m-2)$ hanc exprimet multiplicationem. At in hac quoque operatione pro-

producta ternaria æqualia evadunt triplicata, velut abc, bac, cab; ergo ut semel tantum habeantur, formula postrema per 3 dividi debet, nimirum $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.\ 2.\ 3}$, quæ proinde omnia producta ternaria exhibebit.

Similiter agendo, pro formula omnium combinationum, si quantitates quaternæ accipiantur, obtinenda, constabit, hanc esse $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$; & sic deinceps; quapropter ut omnes adsequamur enunciatas combinationes, quantitatum, quarum numerus sit m., formula generalis evadet

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4).....(m-c)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ (c+1)};$$

si enim c exprimat numerum ab m subtrahendum, quum $m-3$ dividatur per $3+1=4$, $m-4$ per $4+1=5$, generatim $m-c$ dividi debet per $c+1$; *Quod erat* &c.

397. *Coroll.* Ergo si quantitates propositæ sint numeri naturales ab unitate incipientes, & combinationes omnes numerorum, qui bini accipiantur, expetamus, duorum ultimorum productum per productum duorum primorum divisum præbet in quotiente quæsitum combinationũ numerum, sic docente formula $\frac{m(m-1)}{1.\ 2}$, in qua m exprimit ultimum terminum,

&

& $m-1$ penultimum; & sic de ceteris casibus. Ex. gr. si quis scire aveat, quot modis numeri naturales ab unitate usque ad 90 possint terni adsumi, faciat $\frac{90.\ 89.\ 88}{1.\ 2.\ 3} = 117480$, & hic erit numerus quæsitus.

398. Propositio II. *Dato quolibet rerum diversarum numero, quot modis singularum ordo variari possit, investigare.*

Resolutio I. Exprimant *a*, *b* duas res diversas; constat, duobus tantum modis, nempe *ab*, *ba* earum dispositiones perfici posse.

II. Sint tres *a*, *b*, *c*, & *a* in primo loco consistat; quum reliquarum permutationes ex n. I. sint duæ *bc*, *cb*, variationes erunt *abc*, *acb*. Nunc *b* primo loco gaudeat; secundæ variationes erunt pariter *bac*, *bca*. Occupet tandem *c* primum rerum permutandarum locum; tertiæ variationes fient itidem *cab*, *cba*. Ergo permutationum omnium *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* numerus erit $6 = 3.2.1$.

III. Sint quatuor res *a*, *b*, *c*, *d*. Quum prima existente *a*, reliquæ sint tres, numerus variationum cum *a* in capite erit 6 per num. II. Sed id quater ob res diversas accidere debet; ergo integer variationum numerus erit $6.4 = 24 = 4.3.2.1$.

IV. Sint quinque res *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, quarum singulæ principem in permutationibus locum obtineant; quoniam quatuor reliquæ 24 modis diversimode disponi possunt per num. III. variationum numerus erit $24.5 = 120 = 5.4.3.2.1$. Quum autem ratio-

tiocinium istud quousque libet possit continuari, liquet, quod si rerum permutandarum numerus sit m, numerus variationum erit $m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)$ &c. *Quod erat* &c.

399. *Coroll.* 1. Si res aliqua bis repetatur, velut *aab*, finge, res omnes esse diversas, scribendo *aa'b*; variationes erunt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, nimirum sumpta primum *b* in priore loco, deinde in secundo, tum in tertio, fient *baa'*, *ba'a*; *aba'*, *a'ba*; *aa'b*, *a'ab*; sed [*ex hyp.*] $a = a'$; ergo singulæ variationes bis accipiuntur, adeoque numerus $3 \cdot 2 \cdot 1$ per $2 \cdot 1$ est dividendus, proditque $\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 3$ pro numero, qui tribus *a*, *a*, *b* competit. Profecto variationes istæ sunt *aab*, *aba*, *baa*.

Si res aliqua ter occurrat, ut *aaab*, positis rebus omnibus diversis, variationes erunt *6baaa*, *6abaa*, *6aaba*, *6aaab*; ergo variationum numerus utpote sexies multiplicatus dividi debet per $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, hoc est $\frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1}$. Si pariter fuerit *aaabc*, & res omnes diversæ considerentur, variationes omnes erunt

6bcaaa, *6aaabc*, *6cbaaa*, *6aaacb*
6baaac, *6abaac*, *6aabac*, *6caaab*
6acaab, *6aacab*, *6abcaa*, *6aabca*
6acbaa, *6aacba*, *6abaca*, *6acaba*
6cabaa, *6caaba*, *6baaca*, *6bacaa*

ubi statim inspicitur, variationes omnes esse rursus se-

sexies acceptas, quapropter earum numerus $5 . 4 . 3 . 2 . 1$ erit per $6 = 3 . 2 . 1$ dividendus, videlicet $\frac{5 . 4 . 3 . 2 . 1}{3 . 2 . 1}$.

Si proponatur *aaaab*, & res omnes velut diversæ habeantur; quælibet variatio erit per 24 multiplicata, quia per totidem vices res quatuor permutari possunt. Numerus igitur integer variationum per $24 = 4 . 3 . 2 . 1$ erit dividendus. Hinc colligitur, quid agendum sit in reliquis casibus, ubi res aliqua pluries obvenit; rerum enim pluries repetitarum, ac veluti res diversas consideratarum variationes cum rerum non repetitarum variationibus conjunguntur. Sed res non repetitæ situm eundem retinent, quem occuparent, si res omnes essent diversæ; ergo rerum non repetitarum variationes toties sunt adsumptæ, quoties indicat numerus variationum ad res repetitas pertinentium; ac proinde integer variationum numerus per numerum rerum repetitarum variationes exprimentem est dividendus. Itaque si m sit rerum permutandarum numerus, atque n indicet, quoties res eadem occurrat, formula generalis erit

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5) \text{ \&c.}}{n(n-1)(n-2)(n-3) \text{ \&c.}}$$

400. *Coroll.* 2. Quod si res diversæ repetantur, ut *aaabbcd*, variationum numerus erit $\frac{7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1}{3 . 2 . 1 . \quad 2 . 1}$ $= \frac{7 . 6 . 5 . 4}{2 . 1} = 420$. Etenim permutationes omnes tam

tam sexies, quam bis accipiuntur (399.); sunt igitur per $6.2 = 12$ multiplicatæ, adeoque variationum integrarum numerus per 12, vel per $3.2.1.2.1$ dividi debet. Hinc si rerum omnium permutandarum numerus sit m, & numeri rerum repetitarum sint n, r, s, &c. formula universalis erit

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5) \text{ \&c.}}{n(n-1)(n-2)n-3) \text{ \&c. } r(r-1)(r-2) \text{ \&c. } s(s-1)(s-2) \text{ \&c.}}$$

401. Propositio III. *Dato quolibet rerum numero, numerum combinationum, ac permutationum, quas res ipsæ modis omnibus possibilibus adsumptæ subire possunt, invenire.*

Resolutio. Sint primo duæ res a, b; duas combinationes ab, ba binæ patientur; sed singulæ per semet ipsas possunt combinari, nempe aa, bb; ergo numerus permutationum, atque combinationum erit $2 + 2 = 4$. Sint secundo tres res a, b, c, & in iis exponens variationum sit 2, seu binæ combinari, & permutari ponantur. Tres termini ab, ac, bc pro earum combinationibus, ac tres ba, ca, cb pro earum permutationibus habentur, quibus tres alii aa, bb, cc pro earum in semet ipsas combinationibus sunt addendi, adeoque omnium numerus erit $3 + 3 + 3 = 9$.

Iisdem manentibus, variationum exponens sit 3, hoc est ternæ combinari ac permutari statuantur. Terminorum numerus erit 27, nimirum

abc, *cba*, *acb*, *bca*, *bac*, *cab*
aab, *aac*, *bba*, *bbc*, *cca*, *ccb*
baa, *caa*, *abb*, *cbb*, *acc*, *bcc*
aba, *aca*, *bab*, *cac*, *bcb*, *cbc*
aaa, *bbb*, *ccc*.

In tribus igitur rebus a, b, c omnium combinationum, ac permutationum possibilium numerus erit $3+9+27=39$, qui seriem geometricam constituit.

Quare generatim, si rerum, de quibus est quaestio, numerus sit n, combinationum ac permutationum omnium possibilium numerus est summa terminorum $n^1+n^2+n^3+n^4$, + &c. nimirum $\frac{n^{n+1}-n}{n-1}$, in formula generali $f=\frac{tm-a}{m-1}$ (186. n. XVI.) ponendo n^n pro t, n pro m, & n pro a.

ER-

ERRATA — *CORRIGE*.

Pag.	V.	Errata	Corrige
VII	12	*detenuissent*	*deterruissent.*
28	18	$c^3 - b^2$ in f	$c^3 - ab^2$ in f.
74	29	comparendum	comparandum.
168	10	per	pro.
Ibid.	28	numurus	numerus.
170	20	lucrum	lucrum integrum.
171	4	$a1 + \left(\frac{b}{c}\right)^n$	$a\left(1 + \frac{b}{c}\right)^n$.
173	1	$5z\frac{r}{+}$	$5z\frac{r}{t}$.
Ibid.	2	$\frac{r}{+}$	$\frac{r}{t}$.
178	2	$+x^6$	$+\frac{x^6}{7a^6}$.
180	21	us Logarithmi	ut Logarithmi.
205	10	meusuræ	mensuræ.
215	16	exessus	excessus.
217	22	sint invicem æqualia	invicem æquentur.
221	5	$\frac{q-t}{p-t}$	$\frac{q-t}{p-r}$.
223	2	æquatione	æquationes.
232	6	negativæ	negativa.
Ibid.	7	negativa	negativæ.

Pag.	V.		
234	3	fefertur	refertur.
251	24	Sit fi	Sic fi.
253	15	quavis	quamvis.
278	6	$x = \frac{b^2 +}{2c}$	$x = \frac{b^2 + d}{2c}$.
280	22	*AC:DB*	*AC.DB*.
285	26	productam	productum.



IN-

INDEX CAPITUM

SECTIO I.

CAPUT I.

CAPUT II.

CAPUT III.

CAPUT IV.

CAPUT V.

CA-

CAPUT VI.

CAPUT VII.

CAPUT VIII.

SECTIO II.

CAPUT I.

CAPUT II.

CAPUT III.

CAPUT IV.

CAPUT V.

CAPUT VI.

CAPUT VII.

CAPUT VIII.

CAPUT IX.

CA-

CAPUT X.

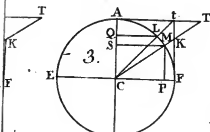
CAPUT XI.

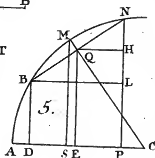


TAB. I.

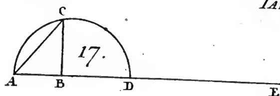
1.

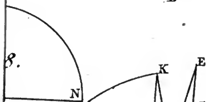
A C D E F B



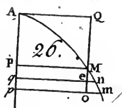


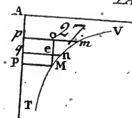
Tab. II.



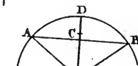


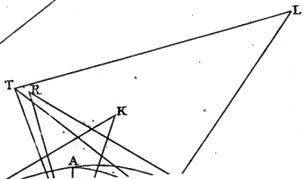
Tab. III.



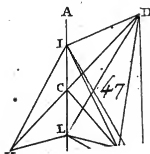







TAB. IV.
L
L
T
R
K
A

Tab. V.



Intiero con cinque tavole, dico 5 veri=
ficato adi 16. Xbre 1838. ...